Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Dr. S. Schwarz
schwarzs@informatik.uni-halle.de

Von-Seckendorff-Platz 1
06120 Halle (Saale)
Zimmer 209
Tel. 0345/55 24715

3.Übung zur Vorlesung „Automaten und Logik“

Sommersemester 2006 Veröffentlichung: 19. Juni 2006

Aufgabe 3.1:

Beweisen Sie (analog dem Beweis für endliche Automaten über Sprachen endlicher Wörter), daß zu jedem NFTA ein äquivalenter DFTA existiert.

Aufgabe 3.2:

Geben Sie für jede der folgenden Baumsprachen $L_i \subseteq \mathsf{Term}(\Sigma)$ mit der Signatur
$\Sigma = \{(f,2),(g,1),(a,0),(b,0)\}$ je einen NFTA und einen $\mathsf{TD}-\mathsf{DFTA}$ an, welcher L_i akzeptiert.
Falls solche Automaten nicht existieren, beweisen Sie dies.

L_1	Menge aller $t \in \mathsf{Term}(\Sigma)$ mit einer geraden Anzahl von Blättern,
L_2	Menge aller $t \in \mathsf{Term}(\Sigma)$ mit einem Ast gerader Länge,
L_3	Menge aller $t \in \mathsf{Term}(\Sigma)$, in denen jeder Ast eine gerade Länge hat,
L_4	Menge aller $t \in \mathsf{Term}(\Sigma)$, in denen die Anzahl der mit f markierten Positionen gleich der Anzahl der mit g markierten Positionen ist,
L_5	Menge aller $t \in \mathsf{Term}(\Sigma)$ t, in denen in jedem mit f markierten Knoten w gilt Höhe$(t\|_{w1}) \geq$ Höhe$(t\|_{w2})$,
L_6	Menge aller $t \in \mathsf{Term}(\Sigma)$ mit einer geraden Anzahl mit g beschrifteter Knoten,
L_7	$= \{t \in \mathsf{Term}(\Sigma) \mid \text{Höhe}(t) \equiv_2 0\}$
L_8	$= \{t \in \mathsf{Term}(\Sigma^{(0)} \cup \Sigma^{(1)}) \mid \text{Höhe}(t) \equiv_2 0\}$
L_9	$= \{C[t] \mid t \in \mathsf{Term}(\Sigma)\}$ mit $C = f(a, g(\Box))$,
L_{10}	$= \{C[t] \mid t \in \mathsf{Term}(\Sigma)\}$ mit $C = f(a, g(\Box))$,
L_{11}	$= \{C[C'[t]] \mid t \in \mathsf{Term}(\Sigma), C \in \mathcal{C}(\Sigma)\}$ mit $C' = f(a, g(\Box))$,
L_{12}	$= \{f(t,t) \mid t \in \mathsf{Term}(\Sigma)\}$,

Aufgabe 3.3:

Gegeben Sind die Signaturen $\Sigma = \{(f,2),(g,1),(a,0)\}$, $\Gamma = \{(f',2),(a',0)\}$ und der von $h : \Sigma \longrightarrow \mathsf{Term}(\Gamma, \mathbb{X})$ mit $h(f) = f'(x_1,x_2), h(g) = f'(x_1,x_1), h(a) = a'$ erzeugte Homomorphismus.

1. Ist die Sprache $L = \{g^i(a) \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathsf{Term}(\Sigma)$ durch einen NFTA (TD − DFTA) erkennbar? Ist die Sprache $h(L) \subseteq \mathsf{Term}(\Gamma)$ durch einen NFTA (TD − DFTA) erkennbar?

2. Der NFTA $\mathcal{A} = \{\{q_f, q_g, q_a\}, \delta, \{q_f\}\}$ mit

$$\begin{aligned}
\delta(a) &= \{q_a\} \\
\delta(g) &= \{(q_a, q_g)\} \\
\delta(f) &= \{(q_a,q_a,q_f),(q_a,q_g,q_f),(q_g,q_g,q_f),(q_g,q_a,q_f),(q_a,q_f,q_f),(q_f,q_a,q_f), \\
&\quad\ (q_g,q_f,q_f),(q_f,q_g,q_f),(q_f,q_f,q_f)\}
\end{aligned}$$

   erkennt die Sprache $L(\mathcal{A})$. Ist die Sprache $h(L(\mathcal{A}))$ durch einen NFTA erkennbar?

Aufgabe 3.4:

1. Zeigen Sie, daß für jede Menge von Kontexten $K \in \mathsf{REC}_{\mathsf{NFTA}} \cap \mathcal{C}(\Sigma)$ und jede Baumsprache $L \in \mathsf{REC}_{\mathsf{NFTA}} \cap 2^{\mathsf{Term}(\Sigma)}$ gilt $\{C[t] \mid C \in K, t \in L\} \in \mathsf{REC}_{\mathsf{NFTA}}$.

2. Finden Sie eine Menge von Kontexten $K \subseteq \mathcal{C}(\Sigma)$ mit $K \notin \mathsf{REC}_{\mathsf{NFTA}}$ und eine Baumsprache $L \subseteq \mathsf{Term}(\Sigma)$ mit $L \notin \mathsf{REC}_{\mathsf{NFTA}}$, so daß $\{C[t] \mid C \in K, t \in L\} \in \mathsf{REC}_{\mathsf{NFTA}}$ gilt.

Aufgabe 3.5:

Aussagenlogische Formeln mit den Variablen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sind Terme. Sind die Menge

1. aller aussagenlogischen Formeln,

2. aller erfüllbaren aussagenlogischen Formeln

durch einen NFTA erkennbar? Falls ja, geben Sie diese Automaten an.

Aufgabe 3.6:

Die Pfadsprache $P(t) \subseteq \Sigma^+$ eines Baumes $t \in \mathsf{Term}(\Sigma)$ ist induktiv definiert durch

für $t = a \in \Sigma^{(0)}$: $\quad P(a) = a$

$$P(f(t_1,\ldots,t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \{f \cdot w \mid w \in P(t_i)\}$$

Zeigen Sie, daß für jede Baumsprache $L \in \mathsf{REC}_{\mathsf{NFTA}} \cap 2^{\mathsf{Term}(\Sigma)}$ gilt $P(L) \in \mathsf{REG}$.