

---

## 1. Übung zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Sommersemester 2008

Veröffentlichung: 11. April 2008

---

### Aufgabe 1.1:

Es seien  $A, B \in 2^M$  Teilmengen einer Menge  $M$ . Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche falsch?

1.  $A \subseteq B \rightarrow A \setminus B \neq \emptyset$ ,
2.  $B \subseteq A \rightarrow B \cap A = B$ ,
3.  $A \subseteq B \rightarrow A \setminus B = \emptyset$ ,
4.  $A \subseteq B \rightarrow A \cup B = A$ ,
5.  $B \subseteq A \rightarrow A \setminus B \neq \emptyset$ .

### Aufgabe 1.2:

Zeigen Sie, daß jede aussagenlogische Formel  $\varphi$  mit beliebigen Junktoren (aussagenlogische Funktoren) aus der Menge  $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  zu einer Formel  $\psi$  äquivalent ist, die nur die folgenden Junktoren enthält:

1.  $\neg$  und  $\vee$
2.  $\neg$  und  $\wedge$
3.  $\neg$  und  $\rightarrow$
4.  $\wedge$  und  $\rightarrow$

Geben Sie für alle Fälle zur Formel  $\neg(p \leftrightarrow q)$  äquivalente Formeln an!

### Aufgabe 1.3:

Geben Sie zu den folgenden Formeln je eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform und in konjunktiver Normalform an!

1.  $\neg((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r)))$
2.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

**Aufgabe 1.4:**

Es sei  $X = A \cup \{\vee, \wedge, \neg, (, ), \mathbf{t}, \mathbf{f}\}$  ein Alphabet. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik zur Erzeugung der Menge aller Formeln der Aussagenlogik an, die höchstens Aussagenvariablen aus der Menge  $A = \{p, q, r, s\}$  enthalten.

**Aufgabe 1.5:**

Zeigen Sie:

1. Falls  $(\varphi \rightarrow \psi)$  allgemeingültig ist und  $\varphi$  allgemeingültig ist, so ist auch  $\psi$  allgemeingültig.
2. Sei  $(\varphi \rightarrow \psi)$  eine Tautologie, wobei  $\varphi$  und  $\psi$  keine gemeinsamen atomaren Formeln haben. Dann ist  $\varphi$  unerfüllbar oder  $\psi$  eine Tautologie.

**Aufgabe 1.6:**

Wir betrachten die folgenden vier Aussagen (a) - (d) für natürliche Zahlen  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . (Zahlen in Dezimaldarstellung)

- (a)  $p$  ist prim,
- (b)  $p$  ist ungerade,
- (c)  $p > 10$ ,
- (d)  $p$  ist kein Teiler von 630.

Welche der folgenden Implikationen ist dann richtig und welche falsch?

- (i)  $(a) \wedge (b) \rightarrow (d)$
- (ii)  $(a) \wedge (c) \rightarrow (b)$
- (iii)  $(a) \wedge (c) \rightarrow (d)$
- (iv)  $(a) \wedge (d) \rightarrow (b)$
- (v)  $(a) \wedge (d) \rightarrow (c)$
- (vi)  $(b) \wedge (c) \rightarrow (d)$
- (vii)  $(b) \wedge (d) \rightarrow (a)$
- (viii)  $(b) \wedge (d) \rightarrow (c)$