Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dr. S. Schwarz
{staiger,schwarzs}@informatik.uni-halle.de

D–06120 Halle (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

2.Übung zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Sommersemester 2008 Veröffentlichung: 22. April 2008

Aufgabe 2.1:

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, welche die Menge aller Formeln der Prädikatenlogik der ersten Stufe mit

- der funktionalen Signatur $\Sigma_F = \{(a,0),(b,0),(g,1),(f,2)\}$,
- der relationalen Signatur $\Sigma_R = \{(P,1),(R,2)\}$ und
- den Variablen $X = \{x, y\}$

erzeugt.

Aufgabe 2.2:

Gegeben sei folgender Ausdruck der Prädikatenlogik.

$\varphi = \forall m \forall n \rightarrow \equiv p \cdot mn \vee \equiv m1 \equiv n1$

1. Geben Sie für jeden Teilausdruck von φ die Menge der Variablen und die Menge der freien Variablen an.
2. überführen Sie φ in eine (für Menschen leichter lesbare) Infixnotation mit Klammerung.
3. Es seien 1 die natürliche Zahl Eins, $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation $\cdot\ :\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sowie m, n und p Variablen aus $\mathbb{N}$. Beschreiben Sie verbal, welcher Sachverhalt dann durch F definiert wird.

Aufgabe 2.3:

1. Zeigen Sie, daß aus der syntaktischen Äquivalenz zweier Terme deren sematische Äquivalenz folgt.
2. Geben Sie zwei semantisch äquivalente Terme an, die nicht syntaktisch äquivalent sind.
3. Zeigen Sie, daß aus der syntaktischen Äquivalenz zweier Formeln deren sematische Äquivalenz folgt.
4. Geben Sie zwei semantisch äquivalente Formeln an, die nicht syntaktisch äquivalent sind.

Aufgabe 2.4:

Gegeben seien

- die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(c,0),(f,1),(g,2)\}$ und $\Sigma_R = \{(P,1),(Q,2)\}$
- die Individuenvariablenmenge $X = \{x, y\}$,
- die Σ-Struktur $S_1 = (A, V_{S_1})$ mit

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{M \mid M \subseteq \mathbb{N} \text{ und } M \text{ endlich}\} \\ [\![c]\!]_{S_1} & = & \{0\} \\ \text{für jedes } M \in A\text{: } [\![f]\!]_{S_1}(M) & = & M \cup \{\max(M)+1\} \\ \text{für alle } M, N \in A\text{: } [\![g]\!]_{S_1}(M,N) & = & M \cap N \\ [\![P]\!]_{S_1} & = & \{M \in A \mid |M| = 3\} \\ [\![Q]\!]_{S_1} & = & \{(M,N) \mid M \cap N = \emptyset\} \end{array}$$

  Die Belegung $\alpha : X \to A$ ist die Abbildung $\alpha(x) = \{3,5,7,11\}, \alpha(y) = \{1,3,5,7,9\}$.
- die Σ-Struktur $S_2 = (B, V_{S_2})$ mit

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{0,1,2\} \\ [\![c]\!]_{S_2} & = & 1 \\ \text{für jedes } z \in B\text{: } [\![f]\!]_{S_2}(z) & = & \min(\mathbb{N} \cap [2z]_{\equiv_3}) \quad \text{(Rest bei Division von } 2z \text{ durch 3)} \\ \text{für alle } z, u \in B\text{: } [\![g]\!]_{S_2}(z,u) & = & \max(z,u) \\ [\![P]\!]_{S_2} & = & \{0\} \\ [\![Q]\!]_{S_2} & = & \{(i, 2-i) \mid i \in B\} \end{array}$$

  Die Belegung $\beta : X \to B$ ist die Abbildung $\beta(x) = 0, \beta(y) = 2$

Bestimmen Sie für jede Zeichenkette s in der linken Spalte
den Wert $\mathfrak{I}_\alpha(s)$ in der Interpretation $\mathfrak{I}_\alpha$ mit der Struktur S_1 und der Belegung α und
den Wert $\mathfrak{I}_\beta(s)$ in der Interpretation $\mathfrak{I}_\beta$ mit der Struktur S_2 und der Belegung β!

Zeichenkette s	$\mathfrak{I}_\alpha(s)$	$\mathfrak{I}_\beta(s)$
$f(g(x,y))$		
$\forall x \exists y P(g(x,y))$		
$P(c) \vee Q(x,y)$		
$\exists x\,(\neg Q(x,x) \wedge \forall z\,(P(z) \to \neg Q(z,x)))$		
$\forall z\,(P(f(z)) \to \neg P(f(c)))$		