Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dr. S. Schwarz
{staiger,schwarzs}@informatik.uni-halle.de

D–06120 HALLE (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

3.Übung zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Sommersemester 2008 — Veröffentlichung: 25. April 2008

Aufgabe 3.1:

Für $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(f,2),(g,2),(n,1),(a,0),(b,0)\}$ und $\Sigma_R = \{(=,2)\}$ ist die Σ-Struktur $S = (A, V_S)$ definiert durch

$$\begin{aligned} A &= \{0,1\}, \\ V_S\,(a) &= 0 \\ V_S\,(b) &= 1, \\ V_S\,(n)\,(x) &= 1-x, \\ V_S\,(f)\,(x,y) &= \min(x,y) \\ V_S\,(g)\,(x,y) &= \max(x,y) \end{aligned}$$

(a) Welche der vier möglichen Abbildungen $h : \{a,b\} \to A$ lassen sich zu einem Homomorphismus $h : \mathsf{T}(\Sigma) \to A$ fortsetzen?

(b) Berechnen Sie den Wert des Termes $g(g(n(a),b), f(a,n(b)))$ unter diesen Homomorphismen!

(c) Berechnen Sie den Wert der Formel $\forall x f(a,g(b,n(a))) = n(f(n(a),x))$ unter diesen Homomorphismen!

Aufgabe 3.2:

Geben Sie zum Satz

$$\varphi = \forall x\ \exists y\ \ (e(x,y) \wedge ((r(y) \wedge \neg r(x)) \vee (\neg r(y) \wedge r(x))))$$

(a) eine Struktur an, welche φ erfüllt,

(b) eine Struktur an, welche φ nicht erfüllt!

Aufgabe 3.3:

Geben Sie einen erfüllbaren Satz φ an, so daß für alle Strukturen $S \in \mathrm{Mod}(\varphi)$ gilt $|S| \geq 3$.

Aufgabe 3.4:

Zeigen Sie, daß für beliebige Mengen Φ von Ausdrücken und Ausdrücken φ aus der Erfüllbarkeit von Φ die Erfüllbarkeit von $\Phi \setminus \{\varphi\}$ folgt.

Aufgabe 3.5:

Zeigen sie, daß für beliebige Mengen Φ von Ausdrücken und jeden allgemeingültigen Ausdruck φ aus der Unerfüllbarkeit von Φ auch die Unerfüllbarkeit von $\Phi \setminus \{\varphi\}$ folgt.

Aufgabe 3.6:

Finden Sie zwei Strukturen A, B, einen Homomorphismus $h : A \to B$ und einen Ausdruck φ, so daß $A \models \varphi$, aber nicht $B \models \varphi$ gilt.

Aufgabe 3.7:

Für die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(k, 0)\}$ und $\Sigma_R = \{(\equiv, 2), (R, 2)\}$ und die Σ-Strukturen $A = (\mathbb{N}, V_A)$ mit

$$\begin{aligned} V_A(k) &= 0 \\ V_A(R) &= \leq \end{aligned}$$

$B = (X^*, V_B)$ (für ein endliches Alphabet X) mit

$$\begin{aligned} V_B(k) &= \varepsilon \quad \text{(leeres Wort aus } X^*\text{)} \\ V_B(R) &= \leq_{\mathsf{qlex}} \quad \text{(quasilexikographische Ordnungsrelation)} \end{aligned}$$

$C = (\mathbb{Z}, V_C)$ mit

$$\begin{aligned} V_C(k) &= 0 \quad \text{(die Zahl 0)} \\ V_C(R) &= \leq \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) A ist isomorph zu B.

(b) A ist nicht isomorph zu C.

(c) Es gibt eine Σ-Struktur $D = (\mathbb{Z}, V_D)$, so dass A isomorph zu D ist.

Aufgabe 3.8:

Bestimmen Sie für die folgenden Formelpaare (A, B), ob $A \models B$ und $B \models A$ gelten:

$$\begin{array}{rcl}
(\varphi & , & \varphi \lor \psi) \\
(\psi & , & \varphi \land \psi) \\
(\varphi & , & \forall x \varphi) \\
(\exists x \varphi & , & \forall x \varphi) \\
(\neg\varphi \land (\psi \lor \neg\eta)) & , & (\neg\psi \land \eta) \lor \varphi) \\
(\forall x \neg P(x) & , & \neg\forall P(x)) \\
(\forall x \neg P(x) & , & \neg\exists P(x)) \\
(\forall x \forall x \neg P(x, y) & , & \forall y \forall x P(y, x)) \\
(\forall x \forall x \neg P(x, y) & , & \forall y \forall x P(x, y)) \\
(\exists x \forall y P(x, y)) & , & \forall x \exists y P(x, y)) \\
(\exists x \varphi \lor \exists x \psi & , & \exists x (\varphi \lor \psi)) \\
(\exists x \varphi \land \exists x \psi & , & \exists x (\varphi \land \psi))
\end{array}$$

Finden Sie Gegenbeispiele für alle nicht geltenden Beziehungen.

Hinweise zur Vorlesung finden Sie online unter
`http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/LogikSoS2008/logik.html`.