Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dr. S. Schwarz
{staiger,schwarzs}@informatik.uni-halle.de

D–06120 HALLE (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

4.Übung zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Sommersemester 2008 Veröffentlichung: 8. Mai 2008

Aufgabe 4.1:

Wir betrachten die Termmenge $\mathsf{T}(\Sigma, X)$ über der Variablenmenge $X = \{x, y\}$ und der funktionalen Signatur $\Sigma_F = \{(f, 2), (g, 2), (a, 0)\}$. Gegeben sind zwei Substitutionen

- $\sigma : X \to \mathsf{T}(X, \Sigma_F)$ durch $\sigma(x) = f(a, y)$ und $\sigma(y) = x$ und
- $\theta : X \to \mathsf{T}(X, \Sigma_F)$ durch $\theta(x) = a$ und $\theta(y) = g(a, a)$

(a) Berechnen Sie für jeden der Terme $t_1 = x$, $t_2 = g(a, y)$ und $t_3 = f(g(x, y), x)$ die Terme $\sigma(t_i)$, $\theta(t_i)$, $\sigma(\theta(t_i))$, $\sigma(\sigma(t_i))$ und $\theta(\sigma(t_i))$. Welche dieser Terme sind Grundterme?

(b) Berechnen Sie für die Σ_F-Struktur $S = (\mathbb{N}, V_S)$ mit $V_S\,(a) = 1$, $V_S\,(f)\,(x, y) = x + y$ und $V_S\,(g)\,(x, y) = x \cdot y$ die Interpretation der oben berechneten Grundterme in $\mathbb{N}$.

Aufgabe 4.2:

Führen Sie die folgenden Substitutionen aus:

(a) $\exists v_0 \exists v_1 (R_0^{(2)} v_0 v_2 \wedge R_0^{(2)} v_1 v_3) \dfrac{v_2 \quad v_2 \quad v_2}{v_0 \quad v_1 \quad v_3}$

(b) $\exists v_0 \exists v_1 (R_0^{(2)} v_0 v_2 \wedge R_0^{(2)} v_1 v_3) \dfrac{v_2 \quad v_0 \quad f_0^{(2)} v_2 v_3}{v_0 \quad v_2 \quad\quad v_3}$

(c) $\exists v_0 \exists v_1 (R_0^{(2)} v_0 v_2 \wedge R_0^{(2)} v_1 v_3) \dfrac{v_3 \quad f_0^{(2)} v_2 v_3}{v_2 \quad\quad v_3}$

Aufgabe 4.3:

Geben Sie eine Formel φ und eine Substitution θ an, so daß φ und $\theta(\varphi)$ nicht semantisch äquivalent sind.

Aufgabe 4.4:

Geben Sie für jedes der folgenden Paare a_1, a_2 von Atomen eine Substitution θ an, so daß $\theta(a_1)$ und $\theta(a_2)$ syntaktisch äquivalent sind.

$$\begin{array}{rcl}
P(x) & , & P(f(y)) \\
Q(x, f(x)) & , & Q(y, g(y)) \\
P(x) & , & P(f(x)) \\
Q(x, f(y)) & , & Q(g(z), f(x)) \\
Q(x, f(y)) & , & Q(g(y), f(x))
\end{array}$$

Aufgabe 4.5:

Die Formel

$$\varphi = \forall u((\forall z(P(f(x,y), z) \wedge \neg P(u,z))) \rightarrow \forall v(P(f(v,u), f(x,x)) \wedge R(v, g(u))))$$

wird durch verschiedene Substitutionen und Umbenennungen in die folgenden Formeln überführt. Geben Sie die jeweils angewendeten Substitutionen und Umbenennungen an.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1 & = & \forall u((\forall z(P(f(x,y) \wedge \neg P(u,z))) \rightarrow \forall v(P(f(v,u), f(x,x)) \wedge R(v, g(u)))) \\
\varphi_2 & = & \forall y((\forall u(P(f(x,u) \wedge \neg P(y,u))) \rightarrow \forall v(P(f(v,y), z) \wedge R(v, g(y))))
\end{array}$$

Hinweise zur Vorlesung finden Sie online unter
`http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/LogikSoS2008/logik.html`.