

5. Übung zur Vorlesung „Mathematische Logik“  
 Sommersemester 2008 Veröffentlichung: 23. Mai 2008

**Aufgabe 5.1:**

Die folgenden vier Regeln behandeln die Kontraposition.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(KP++)} \frac{\Gamma \varphi \quad \psi}{\Gamma \neg\psi \quad \neg\varphi} & \text{(KP+-)} \frac{\Gamma\varphi \quad \neg\psi}{\Gamma\psi \quad \neg\varphi} \\
 \text{(KP--)} \frac{\Gamma\neg\varphi \quad \psi}{\Gamma\neg\psi \quad \varphi} & \text{(KP--)} \frac{\Gamma\neg\varphi \quad \neg\psi}{\Gamma \psi \quad \varphi}
 \end{array}$$

- (a) Zeigen Sie die Ableitbarkeit der Regel (KP+-) aus dem Sequenzkalkül. Sie dürfen alle aus der Vorlesung bekannten Regeln verwenden.
- (b) Verwenden Sie ausschließlich die Regeln (KP+-), (KS) und (Vor), um zu zeigen, dass die Regel (2Not)  $\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \neg\neg\varphi}$  ebenfalls ableitbar ist.

**Aufgabe 5.2:**

Ersetzen Sie im folgenden Beweis die Fragezeichen durch die Angabe, welche Regel auf welche Zeile/Zeilen angewendet wurde. (Hinweis: Es wurden nur die Grundregeln sowie die Regel (KP++) aus Aufgabe 5.1 verwendet.)

- |     |   |            |            |                      |
|-----|---|------------|------------|----------------------|
| 1.  | Γ | φ          | Prämisse   |                      |
| 2.  | Γ | ψ          | Prämisse   |                      |
| 3.  | Γ | ¬φ ∨ ¬ψ    | φ          | ?                    |
| 4.  | Γ | ¬φ ∨ ¬ψ    | ψ          | ?                    |
| 5.  | Γ | ¬φ         | ¬(¬φ ∨ ¬ψ) | ?                    |
| 6.  | Γ | ¬ψ         | ¬(¬φ ∨ ¬ψ) | ?                    |
| 7.  | Γ | ¬φ ∨ ¬ψ    | ¬(¬φ ∨ ¬ψ) | ?                    |
| 8.  | Γ | ¬(¬φ ∨ ¬ψ) | ¬(¬φ ∨ ¬ψ) | ?                    |
| 9.  | Γ |            | ¬(¬φ ∨ ¬ψ) | ?                    |
| 10. | Γ |            | φ ∧ ψ      | Aussagenlogik auf 9. |

### Aufgabe 5.3:

Zeigen Sie, daß die folgenden Regeln ableitbar sind:

$$(a) \frac{\Gamma \quad \neg\neg\varphi}{\Gamma \quad \varphi}$$

$$(b) \frac{\Gamma \quad \varphi \quad \Gamma \quad \psi}{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi)}$$

$$(c) \frac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad (\varphi \rightarrow \psi)}$$

$$(d) \frac{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \quad \varphi}$$

$$(e) \frac{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \quad \psi}$$

### Aufgabe 5.4:

überprüfen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln.

$$(a) \frac{\Gamma \quad \varphi_1 \quad \psi_1 \quad \Gamma \quad \varphi_2 \quad \psi_2}{\Gamma \quad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \quad (\psi_1 \wedge \psi_2)}$$

$$(b) \frac{\varphi \quad \psi}{\forall x\varphi \quad \exists x\psi}$$

$$(c) \frac{\varphi \quad \psi}{\exists x\varphi \quad \exists x\psi}$$

$$(d) \frac{\Gamma \quad \varphi \frac{fy}{x}}{\Gamma \quad \forall x\varphi}, \text{ falls } f \text{ einstelliges Funktionssymbol ist und } f, y \text{ nicht in } \Gamma \forall x\varphi \text{ vorkommen.}$$

Könnte man jede Sequenz ableiten, wenn man die Regel (a) zum Sequenzenkalkül hinzufügt?