Signaturen – Motivation

Zitate aus vergangenen Vorlesungen:

Definition 2.2
Ein Paar (A, Ω) heißt *(universelle) Algebra*, falls

1. A eine nichtleere Menge (Trägermenge) ist, und
2. $\Omega \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(A^n)}$, d.h. Ω eine Menge von Operationen auf A ist.

Bemerkung: Ω korrespondiert zur Signatur Σ.

Definition 2.5
Zwei Algebren (A, Ω) und (A', Ω') heißen *gleichartig*, falls es eine eineindeutige aritätserhaltende Abbildung ψ von Ω auf Ω' gibt.

(Man sagt auch, (A, Ω) und (A', Ω') haben dieselbe Signatur.)

Signaturen

Menge S von Funktionssymbolen

funktionale Signatur: $\Sigma \subseteq S \times \mathbb{N}$
Menge von Paaren (Symbol, Stelligkeit)

$\Sigma^{(i)}$ enthält alle i-stelligen Funktionssymbole
Also gilt $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^{(i)}$.

Nullstellige Funktionssymbole heißen Konstantensymbole.

Beispiele

- Signatur für Halbgruppen $\Sigma = \{(\circ, 2)\}$
- Signatur für Halbgruppen mit neutralem Element
  $\Sigma = \{(\circ, 2), (e, 0)\}$ mit
  $\Sigma^{(0)} = \{e\}$ und $\Sigma^{(2)} = \{\circ\}$
- Signatur für Halbringe $\Sigma = \{(+, 2), (\cdot, 2), (0, 0)\}$ mit
  $\Sigma^{(0)} = \{0\}$ und $\Sigma^{(2)} = \{+, \cdot\}$
- Signatur für Arithmetik mit rationalen Zahlen:
  $\Sigma = \{(+, 2), (-, 2), (\cdot, 2), (/, 2)\} \cup \{c_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$
  ($c_q = q$ üblich)
  $\Sigma^{(0)} = \mathbb{Q}$ und $\Sigma^{(2)} = \{+, -, \cdot, /\}$
- Symbolmenge $S = \{\text{apfel}, \text{birne}, \text{pflaume}, \text{banane}\}$
  $\Sigma = \{(\text{apfel}, 2), (\text{birne}, 2), (\text{banane}, 1), (\text{pflaume}, 0)\}$
  mit $\Sigma^{(2)} = \{\text{apfel}, \text{birne}\}$, $\Sigma^{(1)} = \{\text{banane}\}$ und
  $\Sigma^{(0)} = \{\text{pflaume}\}$

Grundterme

funktionale Signatur Σ

Definition 2.9 (induktiv)

Die Menge $\text{Term}(\Sigma)$ aller Grundterme über Σ ist die kleinste Menge mit der folgenden Eigenschaft:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$, jedes $f \in \Sigma^{(n)}$ und alle $(t_1, \ldots, t_n) \in \text{Term}(\Sigma)^n$ gilt $f(t_1, \ldots, t_n) \in \text{Term}(\Sigma)$.

Damit gilt insbesondere $\Sigma^{(0)} \subseteq \text{Term}(\Sigma)$

Darstellungen von Termen:
Bäume, Infix-, Prefix-, Postfixform

Bemerkung:
Für jede Signatur Σ mit $\Sigma^{(0)} = \emptyset$ gilt $\text{Term}(\Sigma) = \emptyset$.

Beispiele

- $\Sigma = \{(+,2),(-,2),(/,2)\} \cup \{(q,0) \mid q \in \mathbb{Q}\}$,
  $\mathrm{Term}(\Sigma)$ Menge aller arithmetische Ausdrücke (Terme) mit rationalen Zahlen
  z.B.: $(0.5 + 12) - 5/4.3$
- $\Sigma = \{(\cap,2),(\cup,2),(\setminus,2),(\overline{},1),(\emptyset,0),(\emptyset,\{1\})\}$
  $\mathrm{Term}(\Sigma)$ Menge aller Mengenausdrücke mit den Mengen $\emptyset$ und $\{1\}$
  z.B.: $\emptyset \setminus \left(\overline{\emptyset \cup \{1\}}\right)$
- $\Sigma = \{(\mathrm{apfel},2),(\mathrm{birne},2),(\mathrm{banane},1),(\mathrm{pflaume},0)\}$
  z.B.: $\mathrm{pflaume} \in \mathrm{Term}(\Sigma)$
  $\mathrm{banane}(\mathrm{apfel}(\mathrm{pflaume},\mathrm{banane}(\mathrm{pflaume}))) \in \mathrm{Term}(\Sigma)$

Terme mit Variablen

funktionale Signatur Σ,
Menge X von Variablen

Definition 2.10

Die Menge $\mathrm{Term}(\Sigma, X)$ aller Terme über Σ mit Variablen aus X ist die kleinste Menge mit den folgenden Eigenschaften:

1. $X \subseteq \mathrm{Term}(\Sigma, X)$ und
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, jedes $f \in \Sigma^{(n)}$ und alle $(t_1,\dots,t_n) \in \mathrm{Term}(\Sigma,X)^n$ gilt $f(t_1,\dots,t_n) \in \mathrm{Term}(\Sigma,X)$

Bemerkung: $\mathrm{Term}(\Sigma) = \mathrm{Term}(\Sigma, \emptyset)$

Beispiele

- für $\Sigma = \{(+,2),(-,2),(/,2)\}$ und $X = \{a,b,c\}$
  $\mathrm{Term}(\Sigma)$ Menge aller arithmetische Ausdrücke (Terme) mit Variablen aus X
  z.B.: $(a + c)/(b - a) \in \mathrm{Term}(\Sigma, X)$
- für $\Sigma = \{(\cap,2),(\cup,2),(\setminus,2),(\overline{},1),(\emptyset,0)\}$ und $X = \{A,B,C\}$
  $\mathrm{Term}(\Sigma)$ Menge aller Mengenausdrücke mit $\emptyset$ und Variablen aus X
  z.B.: $(A \cap \emptyset) \setminus (A \cup C) \in \mathrm{Term}(\Sigma, X)$
- $\Sigma = \{(\mathrm{apfel},2),(\mathrm{birne},2),(\mathrm{banane},1),(\mathrm{pflaume},0)\}$ und $X = \{x,y,z\}$
  z.B.: $z \in \mathrm{Term}(\Sigma, X)$,
  $\mathrm{pflaume} \in \mathrm{Term}(\Sigma, X)$
  $\mathrm{apfel}(\mathrm{birne}(x,\mathrm{pflaume}),\mathrm{banane}(y)) \in \mathrm{Term}(\Sigma, X)$

Teilterm-Relation

Definition 2.11

Ein Term $t' \in \mathrm{Term}(\Sigma)$ heißt Teilterm eines Termes $t \in \mathrm{Term}(\Sigma)$, wenn t' eine der folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $t' = t$ oder
- $t = f(t_1,\dots,t_n)$ und es existiert ein $k \in \{1,\dots,n\}$, so daß t' Teilterm von t_k ist.

Beispiel: $f(g(a,g(f(b),a)))$, $g(a,g(f(b),a))$, $f(b)$ und b sind Teilterme von $f(g(a,g(f(b),a)))$.

Fakt

Für jede funktionale Signatur Σ ist die Relation „ist Teilterm von“ eine Halbordnung auf der Menge $\mathrm{Term}(\Sigma)$.

Σ-Algebren

Zuordnung:

Funktionssymbol $(f,n) \in \Sigma$	–	Funktion $\omega_f \in \Omega$
funktionale Signatur Σ		Algebra (A,Ω)
(Syntax)		(Semantik)

alternative Bezeichnung für Algebren
(später, z.B. in Prädikatenlogik):

Definition 2.12
Zu einer funktionalen Signatur Σ ist $S = (A, V_S)$ eine Σ-Algebra, falls

- $A \neq \emptyset$ Träger, Universum
- für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $f \in \Sigma^{(n)}$ gilt $V_S(f) : A^n \to A$

Zusammenhang mit Definition 2.2

Algebra (A, Ω) nach Definition 2.2:
Menge Ω von Funktionen auf A

Σ-Algebra $S = (A, V_S)$ nach Definition 2.2:
Funktion V_S, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ jedem $(f,n) \in \Sigma$ eine n-stellige Funktion $V_S(f) : A^n \to A$ zuordnet.

Für jede Σ-Algebra $S = (A, V_S)$ ist (A, Ω) mit $\Omega = \{V_S(f) \mid f \in \Sigma\}$ eine Algebra nach Definition 2.2.

Für jede Algebra (A, Ω) nach Definition 2.2. ist die Algebra $S = (A, V_S)$, wobei V_S für jedes $n \in \mathbb{N}$ jedes $f \in \Sigma^{(n)}$ auf ein $V_S(f) \in \Omega$ abbildet, eine Σ-Algebra.

Beispiele

Für $\Sigma = \{(\circ, 2), (e, 0)\}$ ist

- $(\mathbb{N}, +, 0)$ entspricht der Σ-Algebra $S_1 = (\mathbb{N}, V_{S_1})$ mit $V_{S_1}(\circ) = +$ und $V_{S_1}(e) = 0$ und
- $(2^{\{a,b\}}, \cup, \emptyset)$ entspricht der Σ-Algebra $S_2 = (2^{\{a,b\}}, V_{S_2})$ mit $V_{S_2}(\circ) = \cup$ und $V_{S_2}(e) = \emptyset$ und
- $(\mathbb{Q}, +, \frac{7}{5})$ entspricht der Σ-Algebra $S_3 = (\mathbb{Q}, V_{S_3})$ mit $V_{S_3}(\circ) = +$ und $V_{S_3}(e) = \frac{7}{5}$ und

Für $\Sigma = \{(\text{apfel}, 2), (\text{birne}, 2), (\text{banane}, 1), (\text{pflaume}, 0)\}$:

- $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \cdot, \sqrt{\ }, -\frac{1}{4})$ entspricht $S_4 = (\mathbb{R}_{\geq 0}, V_{S_4})$
  $V_{S_4}(\text{apfel}) = +, V_{S_4}(\text{birne}) = \cdot$, $V_{S_4}(\text{banane}) = \sqrt{\ }$,
  $V_{S_4}(\text{pflaume}) = \frac{1}{4}$
- $(2^{\mathbb{N}}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset)$ entspricht $S_5 = (2^{\mathbb{N}}, V_{S_5})$
  $V_{S_5}(\text{apfel}) = \cup, V_{S_5}(\text{birne}) = \cap$, $V_{S_5}(\text{banane}) = {}^{-}$,
  $V_{S_5}(\text{pflaume}) = \emptyset$

Wert von Grundtermen in Algebren

funktionale Signatur Σ,
Σ-Algebra $S = (A, V_S)$

Definition 2.13
Die Funktion $V_S(t) : \text{Term}(\Sigma) \to A$ ordnete jedem Σ-Grundterm $t = f(t_1, \ldots, t_n) \in \text{Term}(\Sigma,)$ seinen Wert $V_S(t)$ in der Σ-Algebra S zu:

$$V_S(t) = V_S(f)\,(V_S(t_1), \ldots, V_S(t_n))$$

Spezialfall für $t = c \in \Sigma^{(0)}$: $V_S(t) = V_S(c)$

Beispiele

Signatur $\Sigma = \{(\circ, 2), (e, 0)\}$

Term $t = e \circ e$

- Wert von t in $S_1 = (\mathbb{N}, +, 0)$
  ($S_1 = (\mathbb{N}, V_{S_1})$ mit $V_{S_1}(\circ) = +$ und $V_{S_1}(e) = 0$)
  $V_{S_1}(t) = 0$
- Wert von t in $S_2 = (2^{\mathbb{N}}, \cup, \emptyset)$
  ($S_2 = (2^{\mathbb{N}}, V_{S_2})$ mit $V_{S_2}(\circ) = \cup$, $V_{S_2}(e) = \emptyset$)
  $V_{S_2}(t) = \emptyset$
- Wert von t in $S_3 = (\mathbb{Q}, +, 7/5)$
  ($S_3 = (\mathbb{Q}, V_{S_3})$ mit $V_{S_3}(\circ) = +$ und $V_{S_3}(e) = 7/5$)
  $V_{S_3}(t) = 14/5$

Beispiele

Signatur $\Sigma = \{(\text{apfel}, 2), (\text{birne}, 2), (\text{banane}, 1), (\text{pflaume}, 0)\}$

Terme $s, t \in \text{Term}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} s &= \text{birne}(\text{pflaume}, \text{banane}(\text{pflaume})) \\ t &= \text{banane}(\text{apfel}(\text{pflaume}, \text{banane}(\text{pflaume}))) \end{aligned}$$

- Σ-Algebra $S_4 = (\mathbb{R}_{\geq 0}, V_{S_4})$ mit
  $V_{S_4}(\text{apfel}) = +, V_{S_4}(\text{birne}) = \cdot$, $V_{S_4}(\text{banane}) = \sqrt{\ }$,
  $V_{S_4}(\text{pflaume}) = \frac{1}{4}$
  $V_{S_4}(s) = \frac{1}{8}$, $V_{S_4}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Σ-Algebra $S_5 = (2^{\mathbb{N}}, V_{S_5})$ mit
  $V_{S_5}(\text{apfel}) = \cup, V_{S_5}(\text{birne}) = \cap$, $V_{S_5}(\text{banane}) = \overline{\ }$,
  $V_{S_5}(\text{pflaume}) = \emptyset$
  $V_{S_5}(s) = \emptyset$, $V_{S_5}(t) = \emptyset$

Äquivalenz von Grundtermen

Definition 2.14

Grundterme $s, t \in \text{Term}(\Sigma, \emptyset)$ mit $V_S(s) = V_S(t)$ heißen äquivalent in S ($s \equiv_S t$).

Beispiel: Für s, t und S_4, S_5 im vorigen Beispiel gilt $s \not\equiv_{S_4} t$, aber $s \equiv_{S_5} t$

Fakt

Für jede Σ-Algebra S ist $\equiv_S$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\text{Term}(\Sigma)$.

funktionale Signatur Σ

Satz 2.15

Entsteht der Term $s \in \text{Term}(\Sigma)$ aus dem Term $t \in \text{Term}(\Sigma)$, imdem in t ein Vorkommen eines Teiltermes t' von t durch einen Term s' mit $s' \equiv_S t'$ ersetzt wird, so gilt $s \equiv_S t$.

Beweis: strukturelle Induktion über den Aufbau von t.

Grundtermalgebren

Definition 2.16

Für jede funktionale Signatur Σ mit $\Sigma^{(0)} \neq \emptyset$ heißt die Σ-Algebra $T(\Sigma) = \big(\mathrm{Term}(\Sigma), V_{T(\Sigma)}\big)$, in welcher für alle $(f, n) \in \Sigma$ und alle $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}(\Sigma)^n$ gilt

$$V_{T(\Sigma)}(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

Grundtermalgebra zu Σ.

Fakt

Für jede Signatur Σ und jeden Grundterm $t \in \mathrm{Term}(\Sigma)$ gilt $V_{T(\Sigma)}(t) = t$.

Fakt

Für jede Σ-Algebra S ist $\equiv_S$ eine Kongruenzrelation auf der Grundtermalgebra $T(\Sigma)$.

Beispiele

- $\Sigma = \Sigma^{(0)}$, $\mathrm{Term}(\Sigma) = \Sigma^{(0)}$
  $T(\Sigma) = \big(\Sigma^{(0)}, V_{T(\Sigma)}\big)$, wobei für alle $c \in \Sigma^{(0)}$ gilt
  $V_{T(\Sigma)}(c) = c$
- $\Sigma = \{(f, 1), (c, 0)\}$, $\mathrm{Term}(\Sigma) = \{f^n(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $T(\Sigma) = \big(\{f^n(c) \mid n \in \mathbb{N}\}, V_{T(\Sigma)}\big)$, mit $V_{T(\Sigma)}(c) = c$ und für alle $t \in \{f^n(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt $V_{T(\Sigma)}(f)(t) = f(t)$

Homomorphismen von Termalgebren

Satz 2.17

Für jede Σ-Algebra $S = (A, V_S)$ ist die Funktion $V_S : \mathrm{Term}(\Sigma) \to A$ ein Homomorphismus von $T(\Sigma)$ in S.

Achtung:
V_S ist nicht notwendig ein Homomorphismus auf A.

Gegenbeispiel: $\Sigma = \{(\circ, 2), (e, 0)\}$
Σ-Algebra $S = (\mathbb{N}, V_S)$ mit $V_S(\circ) = +$ und $V_S(e) = 0$
Für jeden Term $t \in \mathrm{Term}(\Sigma)$ gilt $V_S(t) = 0$.
Damit ist $1 \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{Im}(V_S)$

Mehrsortige Algebren – Motivation

Modellierung von Funktionen und zwischen Daten verschiedener Sorten (Typen), z.B.:
Vektorraum: Sorte Skalar, Sorte Vektor

Programmierung: Datentypen `int, float, bool, string`

Operationen, z.B.:
smult: Skalar $\times$ Vektor $\to$ Vektor
`floor`: `float` $\to$ `int`
`length`: `string` $\to$ `int`

Menge $\mathbb{S}$ von Sorten

Funktionssymbole mit Typen aus $S \times (\mathbb{S}^* \times \mathbb{S})$
(Notation wie üblich $f : S_1 \times \cdots \times S_n \to S$)

mehrsortige Signatur (mit Sorten aus $\mathbb{S}$) $\Sigma \subseteq S \times (\mathbb{S}^* \times \mathbb{S})$

Mehrsortige Terme

mehrsortige Signatur Σ mit Sorten $\mathbb{S} = \{S_i \mid i \in I\}$

Menge von Variablen (mit Sorten) $X' = X \times \mathbb{S}$

Definition 2.18

Für jede Sorte $S \in \mathbb{S}$ ist die Menge $\mathrm{Term}_S(\Sigma, X)$ aller Terme der Sorte S mit Variablen aus der Menge $X' = X \times \mathbb{S}$ definiert durch:

1. $\{x \mid (x, S) \in X'\} \subseteq \mathrm{Term}_S(\Sigma_F, X')$
2. Für alle f mit $\left(f : S_{i_1} \times \ldots \times S_{i_n} \to S)\right) \in \Sigma$ und alle Tupel $(t_1, \ldots, t_n)$ mit $t_k \in \mathrm{Term}_{S_{i_k}}(\Sigma, X')$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}_S(\Sigma, X')$

Spezialfall: Jede Konstante $(f : S) \in \Sigma$ ist Σ-Term der Sorte S.

mehrsortige Grundterme: $\mathrm{Term}(\Sigma) = \mathrm{Term}(\Sigma, \emptyset)$

Beispiele

Sorten $\mathbb{S} = \{V, S\}$

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{smult} : S \times V \to V), (\mathrm{vadd} : V \times V \to V), \\ (\mathrm{skalprod} : V \times V \to S), (1 : S), (e_1 : V), (e_2 : V) \end{array} \right\}$$

- $1 \in \mathrm{Term}_S(\Sigma)$, $1 \notin \mathrm{Term}_V(\Sigma)$
- $e_2 \in \mathrm{Term}_V(\Sigma)$, $e_2 \notin \mathrm{Term}_s(\Sigma)$
- $\mathrm{smult}(1, e_1) \in \mathrm{Term}_V(\Sigma)$
- $\mathrm{skalprod}(\mathrm{smult}(1, e_2), \mathrm{vadd}(\mathrm{smult}(1, e_1), e_2)) \in \mathrm{Term}_S(\Sigma)$
- $\mathrm{skalprod}(\mathrm{smult}(1, e_2), 1) \notin \mathrm{Term}_s(\Sigma) \cup \mathrm{Term}_V(\Sigma)$

Mehrsortige Algebren

$\mathbb{S}$-sortige (funktionale) Signatur Σ

Definition 2.19

Zu einer mehrsortigen Signatur Σ ist $A = (\{A_S \mid S \in \mathbb{S}\}, V_A)$ eine Σ-Algebra, falls

- für jede Sorte $S \in \mathbb{S}$ eine nichtleere Menge A_S (Träger, Universum der Sorte)
- für jedes Funktionssymbol $\left(f : S_{i_1} \times \cdots \times S_{i_n} \longrightarrow S_i\right) \in \Sigma$ gilt $V_A(f) : A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} \longrightarrow A_i$

Wert des Termes $t \in \mathrm{Term}(\Sigma)$ mit $\mathbb{S}$-sortiger Signatur Σ in der $\mathbb{S}$-sortigen Algebra $A = (\{A_S \mid s \in \mathbb{S}\}, V_A)$
analog zur Definition für einsortige Signaturen und Strukturen

Abstrakte Datentypen

Spezifikation von Klassen von (oft mehrsortigen) Σ-Algebren durch

- Menge von Sorten,
- Signatur,
- Angabe von Eigenschaften und Zusammenhängen der Funktionen und Relationen der Signatur (oft Gleichungen zwischen Termen)

Oft lassen sich weitere Termgleichungen, die in allen Strukturen dieser Klasse gelten, syntaktisch herleiten.