

Literatur zu Graphen

Reinhard Diestel: Graphentheorie
Springer-Verlag, Heidelberg, 2006

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphent>

Gerichtete Graphen

Graph-Diagramme

gerichteter Graph (V, E) (Digraph)

- ▶ Menge V von **Ecken** oder Knoten (vertex)
- ▶ Menge $E \subseteq V^2$ von **Kanten** (edge)

Endpunkte von $(a, b) \in E$ sind $a, b \in V$

Schlinge Kante $(a, a) \in E$ mit $a \in V$

Beispiel: (V, E) mit

$$V = \{0, 1, \dots, 4\}$$

$$E = \{(i, j) \mid j = i + 1 \text{ oder } j = i + 3\}$$

gerichteter Graph:

einsortige relationale Struktur mit einer zweistelligen Relation

Repräsentationen endlicher Graphen

Graph $G = (V, E)$ als **Relation**

(explizite oder implizite) Angabe aller Elemente von V und E

Diagramm des Graphen

Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$:

$|V| \times |V|$ -Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Adjazenzliste von $G = (V, E)$:

$L_G : V \rightarrow 2^V$ mit $u \in L_G(v)$ gdw. $(v, u) \in E$

Ungerichtete Graphen

ungerichteter schlingenfreier Graph (V, E)

- ▶ Menge V von **Ecken**
- ▶ Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von **Kanten**
Notation: ab statt $\{a, b\}$

mit

$$\binom{V}{2} = \{M \subseteq V \mid M \text{ enthält genau 2 Elemente}\}$$

ungerichteter Graph ohne Schlingen:

einsortige relationale Struktur mit einer zweistelligen symmetrischen irreflexiven Relation

Graph (ohne Zusatz) bedeutet im Folgenden immer endlich, ungerichtet und schlingenfrei

Ordnung von Graphen

Bezeichnung: Für jede endliche Menge A bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente in A .

Ordnung des Graphen (V, E) :
Anzahl $|V|$ der Ecken

Der Graph (V, E) heißt

leer gdw. $V = \emptyset$ und $E = \emptyset$

isoliert gdw. $E = \emptyset$

vollständig gdw. $E = \binom{V}{2}$

Eckengrad

Graph (V, E)

$G = (V, E)$ definiert Funktion $\text{grad}_G : V \rightarrow \mathbb{N}$,
wobei für alle $a \in V$ gilt

$$\text{grad}_G(a) = |N_G(a)|$$

$\text{grad}_G(a)$ heißt **Grad** der Ecke a .

(V, E) heißt **n -regulär** (regulär), falls für alle $a \in V$ gilt

$\text{grad}_G(a) = n$

Satz 3.1

Für jeden Graphen (V, E) gilt

$$\sum_{a \in V} \text{grad}_G(a) = 2|E|$$

Folgerung 3.2 (Handshake-Lemma)

In jedem endlichen Graphen ist die Anzahl der Ecken von ungeradem Grad gerade.

Nachbarschaft

Ecken $u, v \in V$ heißen im Graphen (V, E)

benachbart (adjazent) gdw. $uv \in E$

unabhängig gdw. $uv \notin E$

Nachbarschaft (Menge aller Nachbarn) einer Ecke v in G :

$$N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Ecke $v \in V$ mit $N_G(v) = \emptyset$ heißt **isoliert**.

Graph-Isomorphie

(siehe Definition der Isomorphie relationaler Strukturen)

Zwei Graphen $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ heißen

isomorph ($G \simeq H$), falls eine Bijektion $f : V_G \rightarrow V_H$ existiert, so daß für alle $a, b \in V_G$ gilt:

$$\{f(a), f(b)\} \in E_H \text{ gdw. } \{a, b\} \in E_G$$

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf Menge aller Graphen.

Äquivalenzklassen $[G]_{\simeq}$ heißen Isomorphieklassen

prominente Isomorphieklassen:

$$I_n = [(\{1, \dots, n\}, \emptyset)]_{\simeq}$$

$$K_n = [(\{1, \dots, n\}, \binom{\{1, \dots, n\}}{2})]_{\simeq}$$

$$P_n = [(\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\})]_{\simeq}$$

$$C_n = [(\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{n, 1\})]_{\simeq}$$

Graphinvarianten

Funktion f von Graphen heißt **Graphinvariante** gdw. für isomorphe Graphen G, H gilt: $f(G) = f(H)$

Beispiele:

- ▶ Anzahl der Ecken
- ▶ Anzahl der Kanten
- ▶ Menge der Knotengrade

Graphinvarianten helfen beim Isomorphietest

11

Operationen auf Graphen

Für zwei Graphen $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ wird definiert

$$G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$$

$$G \cap H = (V_G \cap V_H, E_G \cap E_H)$$

$$G \square H = (V_G \times V_H, E)$$
 mit

$$E = \left\{ ((a, b), (c, d)) \mid \begin{array}{l} (a = c \text{ und } (b, d) \in E_H) \\ \text{oder } ((a, c) \in E_G \text{ und } b = d) \end{array} \right\}$$

$$G * H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H \cup (V_G \times V_H))$$

für V_G und V_H **disjunkt**

Graphenklassen: $K_{m,n} = I_m * I_n$,
 Sterne $K_{1,n}$
 allgemein $K_{n_1, \dots, n_m} = I_{n_1} * \dots * I_{n_m}$ für $m > 1$

Graph-Relationen

Für Graphen $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ heißt H **Teilgraph** von G , gdw. $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$ gilt

echter Teilgraph von G , gdw. H ist Teilgraph von G und $H \neq G$

induzierter Teilgraph von G , gdw. $V_H \subseteq V_G$ und
 $E_H = \{\{a, b\} \in E_G \mid \{a, b\} \subseteq V_H\}$
 (Autotool: Beschränkung von G auf V_H)

aufspannender Teilgraph von G , gdw. H ist Teilgraph von G und $V_H = V_G$

12

Bipartite Graphen

Definition 3.3

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit** gdw. eine Zerlegung $\{V_0, V_1\}$ von V (d.h. $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ und $V_0 \cup V_1 = V$) mit $\left(\binom{V_0}{2} \cup \binom{V_1}{2} \right) \cap E = \emptyset$ existiert.

Beispiele:

- ▶ P_n für alle $n \in \mathbb{N}$
- ▶ $K_{m,n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$
- ▶ kein K_n für $n > 2$
- ▶ C_n für alle $n \geq 1$ mit $n \equiv_2 0$

Fakt

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn ein $K_{m,n} = (V, E')$ existiert, so daß $E \subseteq E'$ ist.

Komplementärgraph

für $G = (V, E)$ und Eckenmenge $U \subseteq V$

$$G - U = (V \setminus U, E \setminus \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \cap U \neq \emptyset\})$$

Für $G = (V, E)$ und Kantenmenge $F \subseteq \binom{V}{2}$

$$G - F = (V, E \setminus F)$$

Komplementärgraph von Für $G = (V, E)$:

$$\overline{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E \right) = K_{|V|} - E$$

G heißt **selbstkomplementär** gdw. $G \simeq \overline{G}$

Beispiele: P_4, C_5

Pfade in Graphen

Pfad im Graphen G :

Teilgraph P von G , der für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph zu P_n ist.

Pfad $P = (V', E')$ in $G = (V, E)$ ist eindeutig bestimmt durch

- ▶ Menge $E' \subseteq E$ der Kanten oder
- ▶ Folge (v_1, \dots, v_n) der Ecken in $V' \subseteq V$

Länge des Pfades = Anzahl der **Kanten**

z.B. Länge von P_5 ist 4

Pfad von a nach b im Graphen G :

Pfad $p = (v_1, \dots, v_n)$ in G mit $v_1 = a$ und $v_n = b$

Maximaler Pfad in G bzgl. Teilgraph-Relation:

Pfad $P = (V', E')$ ist **maximaler** Pfad in $G = (V, E)$ gdw.

für alle Kanten $\{a, b\} \in E$ gilt:

$(V' \cup \{a, b\}, E' \cup \{ab\})$ ist kein Pfad in G

Kreise in Graphen

Kreis im Graphen G :

Teilgraph C von G , der für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph zu C_n ist.

echte Kreise: C_n mit $n \geq 3$

Kreis $C = (V', E')$ in $G = (V, E)$ ist eindeutig bestimmt durch

- ▶ Menge $E' \subseteq E$ der Kanten oder
- ▶ Folge (v_1, \dots, v_n, v_1) der Ecken in $V' \subseteq V$

Länge des Kreises = Anzahl der **Kanten**

z.B. Länge von C_5 ist 5

Satz 3.4

1. Jeder Graph (V, E) enthält einen Pfad mit $\min\{\text{grad}_G(a) \mid a \in V\} + 1$ Knoten.
2. Jeder Graph (V, E) enthält einen Kreis mit mindestens $\min\{\text{grad}_G(a) \mid a \in V\} + 1$ Knoten.

Satz 3.5

Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen echten Kreis ungerader Länge enthält.

Wege in Graphen

Weg w im Graphen $G = (V, E)$:

Folge von Kanten $w = (v_1 v_2, \dots, v_n v_{n+1}) \in E^*$

(Kanten können mehrfach vorkommen)

durch Folge der Ecken (v_1, \dots, v_{n+1}) eindeutig bestimmt

Weg von a nach b in G :

Weg (v_1, \dots, v_n) in G mit $v_1 = a$ und $v_n = b$

Für jede Ecke $v \in V$ ist (v) ein Weg von v nach v

Wege (v_1, \dots, v_n) mit $v_1 = v_n$ heißen **geschlossen**

Pfade und Kreise in Wegen

Jeder Weg $w = (v_1 v_2, \dots, v_{n-1} v_n)$ im Graphen G definiert einen Teilgraphen $H_w = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_1 v_2, \dots, v_{n-1} v_n\})$ in G .

Satz 3.6

Jeder Weg von a nach b in G enthält einen Pfad von a nach b in G als Teilfolge.

Satz 3.7

Existieren in einem Graphen $G = (V, E)$ zwei verschiedene (nicht überall gleiche) Pfade zwischen $a \in V$ und $b \in V$, dann enthält G einen Kreis.

Bäume

$G = (V, E)$ heißt **Baum**, wenn

- ▶ G zusammenhängend ist und
- ▶ kein Teilgraph von G ein echter Kreis ist.

$G = (V, E)$ heißt **Wald**, wenn kein Teilgraph von G ein echter Kreis ist.

$v \in V$ mit $\text{grad}(v) \leq 1$ heißt **Blatt**

Lemma 3.8

Jeder Baum mit mindestens 2 Ecken hat mindestens 2 Blätter.

Lemma 3.9

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ und jedes Blatt $v \in V$ gilt:
 G ist ein Baum gdw. $G - v$ ein Baum ist.

Zusammenhangsrelation

Relation R_G auf V^2 im Graphen $G = (V, E)$

$(u, v) \in R_G$ gdw. es existiert ein Weg von u nach v in G

Fakt

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist R_G eine Äquivalenzrelation auf V .

Äquivalenzklassen $[u]_{R_G}$ sind Knotenmengen

Von $[u]_{R_G}$ induzierte Teilgraphen von G heißen **Zusammenhangskomponenten** von G

Charakterisierung der Bäume

Satz 3.10

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ sind folgenden Aussagen äquivalent:

1. G ist ein Baum.
2. Zwischen je zwei Ecken $u, v \in V$ existiert genau ein Pfad in G .
3. G ist minimal zusammenhängend.
 (G ist zusammenhängend und für jede Kante $uv \in E$ ist $(V, E \setminus \{uv\})$ nicht zusammenhängend)
4. G ist maximal kreisfrei.
 (G enthält keinen echten Kreis und für jede Kante $uv \in \binom{V}{2} \setminus E$ enthält $(V, E \cup \{uv\})$ einen echten Kreis)

Gerüste

Teilgraph H von G heißt **Gerüst** von G , falls

- ▶ H ein Baum und
- ▶ H ein aufspannender Teilgraph von G ist.

Beispiele:

- ▶ P_5 in K_5
- ▶ $K_{1,4}$ in K_5
- ▶ G für jeden Baum G
- ▶ I_3 hat kein Gerüst
- ▶ $P_2 \cup K_4$ hat kein Gerüst

Satz 3.11

G ist genau dann zusammenhängend, wenn G ein Gerüst besitzt.