2 Mengen, Relationen, Funktionen

2.1 Mengen

Definition 2.1 [Georg Cantor 1895]
Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Mengen werden definiert:

extensional: durch Angabe aller Elemente (nur für endliche Mengen)

Beispiele: $\{0, 1, 2, 3\}$, $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$

intensional: durch Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft

Beispiele: $\{x \mid x$ ist natürliche Zahl und $x < 4\}$, $\big\{y \mid \mathcal{E}(y)\big\}$

Beispiel 1 (Weitere Beispiele von Mengen)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	*Menge der natürlichen Zahlen*
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	*Menge der ganzen Zahlen*
$\emptyset = \{x \mid x \neq x\} = \{\,\}$	*die **leere Menge***

Elementbeziehung

Element-Relation:	$x \in M$
	x ist Element der Menge M, x ist *Element von* M
	x ist *aus* M
Negation von $x \in M$:	$x \notin M$
	es ist nicht $x \in M$, x ist nicht aus M

Mengengleichheit und -inklusion

Gleichheit: $A = B \;:\Leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

x ist genau dann Element der Menge A, wenn x Element von B ist

Inklusion: $A \subseteq B \;:\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

wenn x Element der Menge A ist, so ist x auch aus B

echte Inklusion: $A \subset B$, $A \subsetneq B \;:\Leftrightarrow A \subseteq B \;\wedge\; \exists x (x \in B \wedge x \notin A)$

$A \subseteq B$ und es gibt ein $x \in B$, welches nicht aus A ist

Satz 2.1 *Es seien A, B, C Mengen.*

1. *Es gilt stets $A \subseteq A$.*
2. *Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.*
3. *Es gilt genau dann $A = B$, wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ erfüllt sind.*

Operationen für Mengen

Vereinigung: $A \cup B = \{x | \, x \in A \vee x \in B\}$

x ist genau dann Element der Menge $A \cup B$, wenn x Element von A **oder** von B ist

Durchschnitt: $A \cap B = \{x | \, x \in A \wedge x \in B\}$

x ist genau dann Element der Menge $A \cap B$ ist, wenn x aus A **und** aus B ist

Eigenschaft 2.2 *1. Es gelten $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ und $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.*

2. Aus $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$ folgen $A \cap B \subseteq C \cap D$ und $A \cup B \subseteq C \cup D$.

3. Aus $A, B \subseteq C$ und $A, B \subseteq D$ folgt $A \cup B \subseteq C \cap D$.

Hilfssatz 2.3 *Die folgenden Beziehungen sind paarweise äquivalent:* $A \cap B = A$, $A \subseteq B$ *und* $A \cup B = B$.

Satz 2.4 (Eigenschaften der Operationen $\cap$ und $\cup$)
Es seien A, B, C *Mengen. Dann gelten die folgenden Gleichungen:*

$$A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A \quad \text{(Kommutativität)}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \, , \, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{(Assoziativität)}$$

$$A \cap A = A \quad , \quad A \cup A = A \quad \text{(Idempotenz)}$$

Lemma 2.5 (Verschmelzungsgesetze) *Es seien* A, B *Mengen. Dann gelten die folgenden Gleichungen:*

$$A \cap (A \cup B) = A \quad \text{und} \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

Satz 2.6 (Die Distributivgesetze) *Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten die folgenden Gleichungen:*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \textit{und} \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Die Potenzmenge

Definition 2.2 Es sei M eine Menge. Die Menge $\{A : A \subseteq M\}$ aller Teilmengen von M heißt die **Potenzmenge** von M.

Sie wird mit 2^M oder $\mathfrak{P}(M)$ bezeichnet.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 2^{\emptyset} &= \{\emptyset\} \\ 2^{\{\emptyset\}} &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 2^{\{a,b\}} &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \end{aligned}$$

Das Komplement

Definition 2.3 Es seien M eine Menge und $A \in 2^M$. Dann heißt

$$\overline{A} := \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$$

das **Komplement** von A (in M).

Eigenschaft 2.7 *$\overline{A}$ ist dasjenige Element X der Potenzmenge 2^M, für welches gleichzeitig die Bedingungen $A \cap X = \emptyset$ und $A \cup X = M$ gelten.*

Satz 2.8 (DeMorgansche Regeln) *Es seien $A, B \in 2^M$. Dann gelten*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \textit{und} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Weitere Mengenoperationen

Mengendifferenz	$A \setminus B$	$:=$	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
symmetrische Differenz	$A \,\Delta\, B$	$:=$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
		$=$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Es seien $M_i \subseteq M$.

unendliche Vereinigung	$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i$	$:=$	$\{x : x \in M \wedge \exists i (i \in \mathcal{I} \wedge x \in M_i)\}$
unendlicher Durchschnitt	$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} M_i$	$:=$	$\{x : x \in M \wedge \forall i (i \in \mathcal{I} \rightarrow x \in M_i)\}$

2.2 Relationen

Es seien X, Y Mengen.

geordnetes Paar (x, y) $\big($ oder $[x, y]$ $\big)$

Kreuzprodukt $A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$

Eigenschaft 2.9 *Es seien A, B, C, D Mengen. Dann folgt aus $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$ auch $A \times C \subseteq B \times D$. Weiter gelten*

$$
\begin{aligned}
A \times \emptyset &= \emptyset \times A = \emptyset \\
(A \cap B) \times (C \cap D) &= (A \times C) \cap (B \times D) \\
(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) \\
A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\
(A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C) \\
A \times (B \setminus C) &= (A \times B) \setminus (A \times C)
\end{aligned}
$$

Mehrfaches Kreuzprodukt

Frage der Reihenfolge!

Unser Standard (für $n \geq 3$):

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := A_1 \times \big(A_2 \times (A_3 \times (\ldots \times A_n))\big)$$

speziell: $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 := A_1 \times \big(A_2 \times (A_3 \times A_4)\big)$

Definition 2.4 Eine Teilmenge R von $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ heißt **(n-stellige) Relation** über $A_1, \ldots, A_n$.

Gilt $A_1 = \ldots = A_n = A$, so sprechen wir auch von einer *n-stelligen Relation* über A.

Beispiel 3 (Datumsrelation)

$$\begin{aligned} A_1 = \textit{Tag} &:= \{1, \ldots, 31\} \\ A_2 = \textit{Monat} &:= \{1, \ldots, 12\} \\ A_3 = \textit{Jahr} &:= \{1900, \ldots, 2100\} \end{aligned}$$

$$\textit{Datum} \subseteq \textit{Tag} \times \textit{Monat} \times \textit{Jahr}$$

Beispiele: $(29, 2, 2000) \in$ *Datum* , $(29, 2, 1900) \notin$ *Datum*

$(31, 7, 2007) \in$ *Datum* , $(31, 6, 2007) \notin$ *Datum*

Beispiel 4 (die natürliche Ordnung der ganzen Zahlen $\leq$)

$$\leq \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Eigenschaften zweistelliger Relationen

Definition 2.5 Es seien M eine Menge und R eine zweistellige Relation über M.

Wir nennen die Relation R

reflexiv, falls für alle $x \in M$ stets $(x, x) \in R$ gilt,

symmetrisch, falls aus $(x, y) \in R$ stets $(y, x) \in R$ folgt,

transitiv, falls aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ stets $(x, z) \in R$ folgt,

antisymmetrisch, falls aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ stets $x = y$ folgt.

Äquivalenzrelationen

Definition 2.6 Es seien M eine Menge und $\approx$ eine zweistellige Relation über M.

Wir nennen $\approx$ eine **Äquivalenzrelation** über M, falls $\approx$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Beispiel 5 *Es sei M die Menge der Schüler einer Schule. Für $a, b \in M$ definieren wir $a \approx b$ gdw. a, b sind Schüler derselben Klasse.*

Definition 2.7 Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{Z}$ der Potenzmenge 2^M heißt **Zerlegung (Klasseneinteilung)** von M, falls

1. $\bigcup_{A \in \mathcal{Z}} A = M$
2. $A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{Z}$ und
3. $A \cap B = \emptyset$ für alle $A, B \in \mathcal{Z},\ A \neq B$ gelten.

Definition 2.8 Es seien $\approx$ eine Äquivalenzrelation über M und $a \in M$. Wir nennen

$$[a]_\approx := \{b \mid b \in M \text{ und } a \approx b\}$$

die von a erzeugte **Äquivalenzklasse**.

Satz 2.10 *Für jede Äquivalenzrelation $\approx$ über M ist die Menge aller Äquivalenzklassen*

$$\mathcal{Z}_\approx := \{[a]_\approx : a \in M\}$$

eine Zerlegung von M.

Umgekehrt definiert für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von M die Beziehung

$$a \approx b \quad \text{gdw.} \quad \textit{es gibt ein } A \in \mathcal{Z} \textit{ mit } a, b \in A$$

eine Äquivalenzrelation über M.

Halbordnungsrelationen

Definition 2.9 Es seien $\mathcal{M}$ eine Menge und $\preceq$ eine zweistellige Relation über $\mathcal{M}$.

Wir nennen $\preceq$ eine **Halbordnungsrelation** über $\mathcal{M}$, falls $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Beispiel 6 *1. Ist M eine Menge, so ist die Relation $\subseteq$ eine Halbordnungsrelation über $\mathcal{M} = 2^M$.*

2. $\leq$ ist eine Halbordnungsrelation über $\mathbb{Z}$.

3. Die Teilbarkeitsrelation $\mid$ ist eine Halbordnungsrelation über $\mathbb{N}$.

Lemma 2.11 *Ist $\preceq$ eine Halbordnungsrelation über $\mathcal{M}$ und ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$, so ist die Einschränkung $\preceq_{\mathcal{T}} := \preceq \cap (\mathcal{T} \times \mathcal{T})$ von $\preceq$ auf $\mathcal{T}$ eine Halbordnungsrelation über $\mathcal{T}$.*

Definition 2.10 Es sei $\mathcal{M}$ eine durch $\preceq$ halbgeordnete Menge, und es sei $\mathcal{T}$ Teilmenge von $\mathcal{M}$. Wir nennen $a \in M$

minimales Element von $\mathcal{T}$, falls $a \in \mathcal{T}$ und $b \not\prec a$ für alle $b \in \mathcal{T}$ gilt.

Minimum von $\mathcal{T}$, falls $a \in \mathcal{T}$ und $a \preceq b$ für alle $b \in \mathcal{T}$ gilt.

untere Schranke von $\mathcal{T}$, falls $a \preceq b$ für alle $b \in \mathcal{T}$ gilt.

Infimum von $\mathcal{T}$, falls a das Maximum der Menge $\{b \mid b \in \mathcal{M}$ und b ist untere Schranke von $\mathcal{T}\}$ ist.

Supremum von $\mathcal{T}$, falls a das Minimum der Menge $\{b \mid b \in \mathcal{M}$ und b ist obere Schranke von $\mathcal{T}\}$ ist.

Folgerung 2.12

1. *Jedes Minimum von $\mathcal{T}$ ist sowohl minimales Element, untere Schranke als auch Infimum von $\mathcal{T}$.*
2. *Ist eine untere Schranke von $\mathcal{T}$ Element von $\mathcal{T}$, so ist sie Minimum von $\mathcal{T}$.*

Spezielle Operationen für zweistellige Relationen

Definition 2.11 Es seien $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ zweistellige Relationen.

Verbindung

$$R \circ S := \{(a,c) \mid \text{ es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in S\}$$

Umkehrrelation $R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

Folgerung 2.13 $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

Folgerung 2.14 *Eine zweistellige Relation $R \subseteq A \times A$ ist genau dann symmetrisch, wenn $R = R^{-1}$, und R ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$.*

Folgerung 2.15 *Es seien R, R_1, R_2, R_3 zweistellige Relationen über einer Menge M. Dann gelten die folgenden Beziehungen.*

Aus $R_1 \subseteq R_2$ *folgen* $R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$ *und* $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

Aus $R_2 \subseteq R_3$ *folgt* $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$.

Aus $R \subseteq R^{-1}$ *folgt* $R = R^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
R_1 \circ (R_2 \cup R_3) &= (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3) \\
(R_1 \cup R_2) \circ R_3 &= (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3) \\
(R_1 \cup R_2)^{-1} &= R_1^{-1} \cup R_2^{-1} \text{ und } (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1} \\
(R_1 \circ R_2)^{-1} &= R_2^{-1} \circ R_1^{-1}
\end{aligned}
$$

Definition 2.12 Es seien M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation über M.

Wir nennen R^* die **reflexive und transitive Hülle** von R, falls R^* die kleinste reflexive und transitive Relation ist, die R umfasst. Wir nennen R^+ die **transitive Hülle** von R, falls R^+ die kleinste transitive Relation ist, die R umfasst.

Ferner seien $I_M := \left\{(a, a) \mid a \in M\right\}$, $R^0 := I_M$ und $R^n := R \circ R^{n-1}$ für $n \geq 1$.

Lemma 2.16 *Es sei eine Relation $R \subseteq M \times M$ gegeben. Für alle $n \geq 0$ gilt $(m, m') \in R^n$ genau dann, wenn es eine Folge $c_0, c_1, ..., c_n$ von Elementen aus M mit $c_0 = m, c_n = m'$ und $(c_i, c_{i+1}) \in R$ für $i = 0, ..., n-1$ gibt.*

Satz 2.17 *Es sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf einer Menge M. Dann gilt $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ und $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$.*

2.3 Funktionen

Leonhard Euler (1755): *Eine Funktion benennt eine Abhängigkeit, die*

„alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift“.

Definition 2.13 [Funktion]
Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **eindeutig**, falls aus $(a, b_1), (a, b_2) \in R$ stets $b_1 = b_2$ folgt.

Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt (**partielle**) **Funktion** bzw. **Funktion aus** A **in** B, falls f eindeutige Relation ist.

Definition 2.14 Es sei $f \subseteq A \times B$ eindeutige Relation.

Wir nennen f eine Funktion ***von*** A in B, falls der Definitionsbereich

$$dom(f) = \{a \mid a \in A \wedge \exists b(b \in B \wedge f(a) = b)\}$$

mit A übereinstimmt.

Wir nennen f eine Funktion aus A ***auf*** B, falls der Wertebereich

$$ran(f) = \{b \mid b \in B \wedge \exists a(a \in A \wedge f(a) = b)\}$$

mit B übereinstimmt.

Wir nennen f eine Funktion ***von*** A ***auf*** B, falls $dom(f) = A$ und $ran(f) = B$ gelten.

Notation: $f(a) = b$ für $(a, b) \in f$,

$f :\subseteq A \to B$ für f ist (partielle) Funktion *aus* A in B und

$f : A \longrightarrow B$ für f ist (vollständig definierte) Funktion *von* A in B

Definition 2.15 Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **eindeutig umkehrbar**, falls R^{-1} eine Funktion ist.

Folgerung 2.18 *Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist genau dann eindeutig umkehrbar, wenn aus $(a_1, b), (a_2, b) \in R$ stets $a_1 = a_2$ folgt.*

Definition 2.16 Wir nennen eine (partielle) Funktion $f \subseteq A \times B$ **eineindeutig**, falls f eindeutige und eindeutig umkehrbare Relation ist.

Notation:

Bild einer Menge $M \subseteq A$: $f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}$

Urbild einer Menge $M' \subseteq B$: $f^{-1}(M') = \{a \mid f(a) \in M'\}$

Andere Bezeichnungen:

Eine Funktion $f :\subseteq A \longrightarrow B$ heißt

injektiv, falls $|\{x : f(x) = y\}| \leq 1$ für alle $y \in B$ gilt,

d.h. f ist eineindeutig,

surjektiv, falls $|\{x : f(x) = y\}| \geq 1$ für alle $y \in B$ gilt,

d.h. f ist Abbildung *auf* B, und

bijektiv, falls $|\{x : f(x) = y\}| = 1$ für alle $y \in B$ gilt,

d.h. f ist injektiv und surjektiv.

Bemerkung: Die Bezeichnungen *injektiv, surjektiv* und *bijektiv* werden meist für vollständig definierte Funktionen benutzt.

Hintereinanderausführung von Funktionen

Folgerung 2.19 *Es seien $f :\subseteq A \to B$ und $g :\subseteq B \to C$ Funktionen.*

1. *Dann ist die Relation $f \circ g$ eine Funktion aus A in C, und es gilt*
$$f \circ g(a) = g(f(a)) \text{ für } a \in dom(f) \cap f^{-1}(dom(g)).$$
2. *Sind darüberhinaus f und g eineindeutige Funktionen, so ist auch $f \circ g$ eineindeutig.*
3. *Gelten $f : A \to B$ und $f(A) \subseteq dom(g)$, so ist auch $f \circ g : A \to C$.*

Bezeichnung: Die Menge aller Funktionen **von** A **in** B wird mit B^A bezeichnet:

$$B^A := \{f \mid f : A \to B\}$$

n-stellige Funktionen

$$f :\subseteq A^n \to B$$

n-faches Kreuzprodukt

äqivalente Darstellungen

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}} \text{ oder}$$

$$A^n = \{g \mid g : \{1, \ldots, n\} \to A\}$$

Folgerung 2.20 (Spezialfall) $A^0 = A^\emptyset = \{\emptyset\}$