Liouvillesche, berechenbare, Borel normale und Martin-Löf zufällige Zahlen

Georg-Cantor-Vorlesung
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

gehalten von Ludwig Staiger
am 2. Juni zu Halle

Inhalt

Reelle Zahlen und *b*-näre Entwicklungen I

Basis: $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

b-näre Entwicklung: $\alpha = 0.\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_i \cdots \in A_b^\omega$, $\alpha \in [0,1]$

$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot b^{-i}$

Eigenschaft

Es sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

- *Jede reelle Zahl α hat mindestens eine und höchstens zwei b-näre Entwicklungen.*
- *Hat $\alpha \in \mathbb{R}$ zwei b-näre Entwicklungen so gilt $\alpha = m \cdot b^{-n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.*
- *Jede irrationale Zahl α hat genau eine b-näre Entwicklung.*

Reelle Zahlen und *b*-näre Entwicklungen II

Cantorsches Diagonalverfahren

b-näre Entwicklungen wurden von Cantor beim Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen benutzt.

Dieses Diagonalverfahren wurde auf viele verschiedene Probleme verallgemeinert

- $|M| < |2^M|$
- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Hierarchiesätze in der Komplexitätstheorie …etc

Gleichmächtigkeit von Gerade und Quadrat

Die Gleichmächtigkeit von $(0,1]$ und $(0,1] \times (0,1]$ kann direkt durch Manipulation der *b*-nären Entwicklungen reeller Zahlen eingesehen werden.

Notation: Zeichenketten und Sprachen

Endliches Alphabet $A_b = \{0, \ldots, b-1\}$, $|A_b| = b$

Endliche Zeichenketten (Wörter) $w = x_1 \cdots x_n \in A_b^*$, $x_i \in A_b$

Länge $|w| = n$

Sprachen $W \subseteq A_b^*$

Unendliche Wörter (ω-Wörter) $\mathbf{x} = x_1 \cdots x_n \cdots \in A_b^\omega$
$\mathbf{x} : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to A_b$

Präfixe unendlicher Wörter $\mathbf{x}{\restriction}n \in A_b^*$, $|\mathbf{x}{\restriction}n| = n$

ω-Sprachen $F \subseteq A_b^\omega$

Algebraische Zahlen

Definition (Algebraische Zahl)

Eine reelle Zahl α heißt *algebraisch* falls sie Nullstelle eines Polynoms $P(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i \cdot z^i$ mit ganzzahligen Koeffizienten $p_0, \ldots, p_n$ ist.

Ist das Polynom $P(z)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und ist $p_n \neq 0$, so nennt man α *algebraisch vom Grad* n.

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ nicht algebraisch, so heißt α *transzendent*.

Satz (Cantor)

Es gibt nur abzählbar viele algebraische Zahlen.

Korollar

Es gibt transzendente Zahlen.

Transzendente Zahlen

Satz (Liouville 1844)

Ist α eine irrationale algebraische Zahl vom Grad n, so gibt es eine reelle Zahl $c_\alpha > 0$ derart, dass für alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ die Beziehung

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq c_\alpha \cdot \frac{1}{q^n} \text{ gilt.}$$

Beispiel

$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i!}$ *ist nicht algebraisch:* $p = \sum_{i=0}^{n} 2^{n!-i!}, q = 2^{n!}$

$$|\alpha - \sum_{i=0}^{n} 2^{-i!}| = \left|\alpha - \frac{\sum_{i=0}^{n} 2^{n!-i!}}{2^{n!}}\right| = \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i!} < \frac{1}{2^{(n+1)!-1}} \leq \frac{1}{(2^{n!})^n}$$

Berechenbare Zahlen

Definition (Berechenbare Zahl)

Eine reelle Zahl α ist genau dann *berechenbar*, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ derart gibt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 2^{-n} \text{ gilt, falls } f(n) = (p, q)\,.$$

Eigenschaft

- *Eine reelle Zahl α ist genau dann berechenbar, wenn*
  - *sie für ein b eine berechenbare (als Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to A_b$) b-näre Entwicklung hat, oder*
  - *für alle $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$, ihre b-nären Entwicklungen berechenbar sind.*
- *Algebraische Zahlen sind berechenbar.*

Links-berechenbare Zahlen

Definition (Links-berechenbare Zahl)

Eine reelle Zahl α ist genau dann *links-berechenbar*, wenn es eine berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ derart gibt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

① $g(n) \leq g(n+1) \leq \alpha$, und

② $\lim\limits_{n \to \infty} g(n) = \alpha$ gelten.

Eigenschaft

- *Jede berechenbare reelle Zahl ist links-berechenbar.*
- *Es gibt nicht berechenbare links-berechenbare reelle Zahlen.*
- *Eine reelle Zahl ist genau dann berechenbar, wenn sie sowohl links- als auch rechts-berechenbar ist.*

Liouvillesche Zahlen

Definition (Liouvillesche Zahl)

Eine reelle Zahl α wird *Liouvillesche Zahl* genannt, wenn sie irrational ist und für jede natürliche Zahl k ganze Zahlen p_k und $q_k > 1$ mit

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^k} \text{ existieren.}$$

Beispiel (Wiederholung)

$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$ *ist Liouvillesche Zahl.*

Irrationalitätsmaß

Definition (Irrationalitätsmaß)

Der *Irrationalitätsmaß* einer reellen Zahl α ist ein Maß dafür, wie „*gut*" α durch rationale Zahlen angenähert werden kann:

$$\inf\left\{\mu \geq 0 : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu}} \text{ hat nur endlich viele Lösungen } p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

Somit sind Liouvillesche Zahlen jene reellen Zahlen mit unendlichem Irrationalitätsmaß.

siehe auch: http://mathworld.wolfram.com/IrrationalityMeasure.html

Irrationalitätsmaße von Zahlen

Satz

- *Rationale Zahlen haben das Irrationalitätsmaß* 1.
- *Irrationale Zahlen* α *haben ein Irrationalitätsmaß* $2 \leq \mu(\alpha) \leq \infty$.

Satz (Roth 1955)

Alle irrationalen algebraischen Zahlen α *haben das Irrationalitätsmaß* $\mu(\alpha) = 2$.

Borel normale Zahlen

Definition (Borel Normalität zur Basis b)

Eine reelle Zahl $\alpha \in [0,1]$ ist genau dann *Borel normal zur Basis b*, wenn jedes Wort $w \in A_b^\ell$ der Länge ℓ mit der gleichen Häufigkeit als Teilwort in der b-nären Entwicklung $\mathbf{x}$ von α auftritt, das heißt, für $\mathbf{x} \in A_b^\omega$ mit $\alpha = 0.\mathbf{x}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\{i : 1 \leq i \leq n \wedge \mathbf{x}\restriction i \in A_b^* \cdot w\}\right|}{n} = b^{-|w|}.$$

Definition (Absolute Borel Normalität)

Eine reelle Zahl α ist *absolut Borel normal*, wenn sie Borel normal zu jeder Basis ist.

siehe auch: http://mathworld.wolfram.com/NormalNumber.html

Zahlen, die Borel normal zur Basis b sind

Definition (De Bruijn Wörter)

Ein *de Bruijn Wort* $B \in A_b^*$ der Ordnung k ist ein kürzestes Wort, welches in zyklischer Form alle Wörter der Länge k als Teilwörter hat.

$B(b,k)$ ist das erste Wort (in lexikographischer Ordnung), welches in zyklischer Form alle Wörter aus A_b^k als Teilwörter hat.

Beispiel (De Bruijn Wörter)

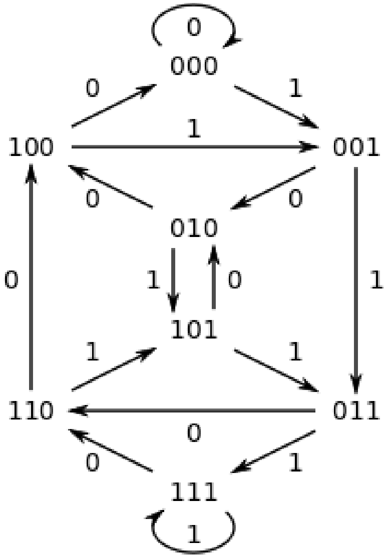
- $B(2,2) = 0011$ *und* $B(2,3) = 00010111$ *sind binäre de Bruijn Wörter der Ordnung* 2 *bzw.* 3, *und*
- $B(3,2) = 001021122$ *ist ternäres de Bruijn Wort der Ordnung* 2.

$$0011,\quad 0011,\quad 0011,\quad 0011$$

Eigenschaft

$$|B(b,k)| = b^k$$

De Bruijn Wörter: Eulersche Kreise in De Bruijn Graphen



Kante im Graphen für $B(2,4)$:

$$\mathtt{abc} \xrightarrow{\mathtt{d}} \mathtt{bcd}$$

$$\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d} \in \{0,1\}$$

Liouvillesche Zahlen die Borel normal zur Basis b sind

Wir setzen für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{W} := (w_i)_{i \in \mathbb{N}},\ |w_i| > 0$.

$$\mathbf{x}_f(\mathcal{W}) := \underbrace{w_1 \cdots w_1}_{f(1)\text{mal}} \cdot \underbrace{w_2 \cdots w_2}_{f(2)\text{mal}} \cdot \ \cdots \ \cdot \underbrace{w_i \cdots w_i}_{f(i)\text{mal}} \cdot \ \cdots$$

Proposition (Maillet 1904; Nandakumar & Vangapelli 2014)

Ist $f(i) \geq i^i$, so

1. *ist $0.\mathbf{x}_f(\mathcal{W})$ eine Liouvillesche Zahl, und*
2. *ist darüber hinaus $w_i = B(b, i)$, so ist $0.\mathbf{x}_f(\mathcal{W})$ Borel normal zur Basis b.*

Borel Normalität: Basisunabhängigkeit

Satz (Cassels 1959, Schmidt 1960)

Es gibt $b, r \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass α normal zur Basis b, aber nicht normal zur Basis r ist.

Satz (Borel 1909)

Es gibt absolut Borel normale Zahlen.

Algorithmische Zufälligkeit

Paradigma der Unvorhersagbarkeit

Ein ω-Wort ist genau dann *zufällig*, wenn keine konstruktive Vorhersagestrategie gegen es gewinnen kann.

Unser Modell:

- Spiel gegen ein ω-Wort $\mathbf{x} \in A_b^\omega$.
- Spielstrategie $\Gamma : A_b^* \times A_b \to [0,1]$, wobei $\sum_{x \in A_b} \Gamma(w,x) \leq 1$ für $w \in A_b^*$

(Wette auf das Ergebnis $x \in A_b$, falls bisher $w \in A_b^*$ „gezogen“ wurde)

- $\mathcal{V}_\Gamma(\mathbf{x}\restriction n)$ ist das Kapital nach der $n$ten Runde, d.h.

$$\mathcal{V}_\Gamma(\mathbf{x}\restriction n+1) = b \cdot \Gamma(\mathbf{x}\restriction n, x) \cdot \mathcal{V}_\Gamma(\mathbf{x}\restriction n), \text{ für } \mathbf{x}(n+1) = x$$

- ergibt ein Supermartingal $\mathcal{V}_\Gamma : A_b^* \to \mathbb{R}_+$, d.h.

$$\mathcal{V}_\Gamma(\mathbf{x}\restriction n) \geq \frac{1}{b} \cdot \sum_{x \in A_b} \mathcal{V}_\Gamma((\mathbf{x}\restriction n) \cdot x)$$

Spielstrategien: Martingale $\mathcal{V} : A_b^* \to \mathbb{R}_+$

Definition (Supermartingal)

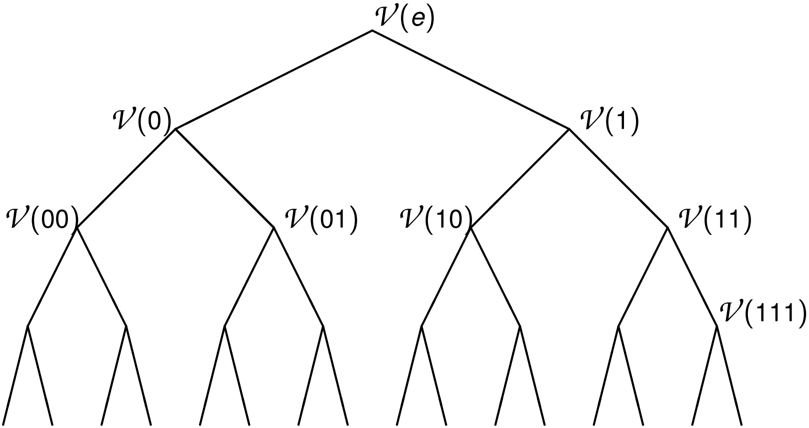
$$b \cdot \mathcal{V}_\Gamma(w) \geq \sum_{x \in A_b} \mathcal{V}_\Gamma(wx)$$

Eigenschaft

- $0 \leq \mathcal{V}_\Gamma(w) \leq b^{|w|}$
- *Ist kein Wort der Menge $W \subseteq A_b^*$ Präfix eines anderen, so gilt*

$$\sum_{w \in W} b^{-|w|} \cdot \mathcal{V}_\Gamma(w) \leq \mathcal{V}_\Gamma(e)\,.$$

Spielstrategien: Martingale $\mathcal{V} : \{0,1\}^* \to \mathbb{R}_+$



Zufälligkeit

Satz (Levin 1970)

Für jedes A_b gibt es ein optimales links berechenbares (approximierbar von unten) Supermartingal $\mathcal{U} : A_b^* \to \mathbb{R}_+$, m.a.W., zu jedem links berechenbaren Supermartingal $\mathcal{V} : A_b^* \to \mathbb{R}_+$ gibt es eine Konstante $c_{\mathcal{V}} > 0$ derart, dass

$$\forall w \big(w \in A_b^* \to \mathcal{U}(w) \geq c_{\mathcal{V}} \cdot \mathcal{V}(w) \big).$$

Definition (Martin-Löf Zufälligkeit)

$\mathbf{x} \in A_b^\omega$ ist *Martin-Löf zufällig*, falls keine berechenbare Spielstrategie Γ gegen $\mathbf{x}$ gewinnen kann, genauer, falls $\limsup_{n \to \infty} \mathcal{U}(\mathbf{x} \restriction n) < \infty$.

Partielle Zufälligkeit: Definition

Partielle Zufälligkeit versucht, für $\mathbf{x} \in {A_b}^\omega$ den größten Exponenten γ, der

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}\restriction n) \approx b^{\gamma\cdot n+o(n)}.$$

erfüllt, zu messen.

Genauer, $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 1-\gamma :\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{U}(\mathbf{x}\restriction n) & \geq_{i.o.} & b^{\gamma'\cdot n+o(n)} & \text{für } \gamma' < \gamma\text{, und} \\ \mathcal{U}(\mathbf{x}\restriction n) & \leq & b^{\gamma'\cdot n+o(n)} & \text{für } \gamma' > \gamma. \end{array}$$

Eigenschaft

$$\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n - \log_b \mathcal{U}(\mathbf{x}\restriction n)}{n} \in [0,1]$$

Man beachte

Je höher der Wert $\underline{\kappa}(\mathbf{x})$, desto „*zufälliger*“ das ω-Wort $\mathbf{x}$.

Partielle Zufälligkeit: Beispiele

Beispiel (Dilution)

Wir setzen $\mathbf{y} := x_1 00 x_2 00 \cdots x_i 00 \cdots$ für $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_i \cdots \in A_b^\omega$.

Dann gelten $\mathcal{U}(\mathbf{y}\restriction 3n) \approx b^{2n} \cdot \mathcal{U}(\mathbf{x}\restriction n)$ und $\underline{\kappa}(\mathbf{y}) = \frac{1}{3} \cdot \underline{\kappa}(\mathbf{x})$.

Beispiel (Nicht-zufällige ω-Wörter mit $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 1$)

Für Martin-Löf zufälliges $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_i \cdots \in A_b^\omega$ setzen wir

$$\mathbf{y}(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \in \{2^n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ und} \\ \mathbf{x}(i) & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{U}(\mathbf{y}\restriction 2^n) \geq c \cdot b^n$.

Partielle Zufälligkeit: Basisunabhängigkeit

Satz (Calude & Jürgensen 1995, Hertling & Weihrauch 2003, *St.* 2002)

Sind $\mathbf{x} \in A_b^\omega$, $\mathbf{y} \in A_r^\omega$ *und* $0.\mathbf{x} = 0.\mathbf{y}$, *so ist* $\mathbf{x}$ *genau dann zufällig, wenn* $\mathbf{y}$ *zufällig ist.*

Satz (*St.* 2002)

Es seien $\mathbf{x} \in A_b^\omega$ *und* $\mathbf{y} \in A_r^\omega$ *und* $0.\mathbf{x} = 0.\mathbf{y}$.

Dann gilt $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = \underline{\kappa}(\mathbf{y})$.

Eigenschaft

① *Ist* $\mathbf{x} \in A_b^\omega$ *berechenbar, so ist* $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 0$.

② *Ist* $\mathbf{x} \in A_b^\omega$ *zufällig, so ist* $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 1$.

Partielle Zufälligkeit: Weitere Beziehungen

Satz (Kolmogorov 1968; *St.* 2002)

① *Ist* $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 1$, *dann ist* $\alpha = 0.\mathbf{x}$ *absolut Borel normal.*

② *Ist* α *Liouvillesche Zahl und* $\mathbf{x}$ *ihre b-näre Entwicklung, so gilt* $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 0$.

Satz (Calude & *St.* 2015; Jarník 1929, Ryabko 1986)

Hat $\alpha \in [0,1]$ *das Irrationalitätsmaß* $\mu(\alpha)$ *und ist* $\mathbf{x}$ *die b-näre Entwicklung von* α, *so gilt* $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) \leq 2/\mu(\alpha)$.

Außerdem gibt es zu jedem $\mu \in [2,\infty]$ *ein* $\alpha \in [0,1]$ *mit Irrationalitätsmaß* $\mu(\alpha) = \mu$ *derart, daß* $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 2/\mu$ *für die b-näre Entwicklung* $\mathbf{x}$ *von* α *erüllt ist.*

Literatur: Algorithmische Zufälligkeit

- Calude, C.S.: *Information und Randomness. An Algorithmic Perspective*, 2nd ed., Springer, Berlin (2002).
- Downey, R., Hirschfeldt D.: *Algorithmic Randomness und Complexity*, Springer, Heidelberg (2010).
- Li, M., Vitányi, P.M.B.: *An Introduction to Kolmogorov Complexity und Its Applications*, Springer, Berlin (1993).
- Nies, A.: *Computability und Randomness*, Oxford Univ. Press, Oxford (2009).

Die Beziehungen zwischen den Klassen reeller Zahlen

Eigenschaft

- *Martin-Löf zufällige Zahlen sind absolut Borel normal* ($\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{N}$).
- *Die Mengen der Martin-Löf zufälligen Zahlen und berechenbaren Zahlen sind disjunkt* ($\mathcal{Z} \cap \mathcal{C} = \emptyset$).
- *Die Mengen der Martin-Löf zufälligen Zahlen und Liouvilleschen Zahlen sind disjunkt* ($\mathcal{Z} \cap \mathcal{L} = \emptyset$).

⇨ *Die folgenden sieben der 16 Booleschen Kombinationen sind leer:* $\overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{C}} \cap \color{red}{\overline{\mathcal{N}}} \color{black}\cap \color{red}{\mathcal{Z}}$, $\overline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{C} \cap \color{red}{\overline{\mathcal{N}}} \color{black}\cap \color{red}{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{C}} \cap \color{red}{\overline{\mathcal{N}}} \color{black}\cap \color{red}{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{C} \cap \color{red}{\overline{\mathcal{N}}} \color{black}\cap \color{red}{\mathcal{Z}}$, $\overline{\mathcal{L}} \cap \color{red}{\mathcal{C}} \color{black}\cap \mathcal{N} \cap \color{red}{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{L} \cap \color{red}{\mathcal{C}} \color{black}\cap \mathcal{N} \cap \color{red}{\mathcal{Z}}$ *und* $\color{red}{\mathcal{L}} \color{black}\cap \overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{N} \cap \color{red}{\mathcal{Z}}$.

Frage

Was ist mit den restlichen neun Kombinationen?

Borel Normalität von Liouvilleschen Zahlen

Satz (Bugeaud 2002)

Es gibt überabzählbar viele absolut Borel normale Liouvillesche Zahlen, und es gibt überabzählbar viele Liouvillesche Zahlen, die nicht *normal zu jeder Basis sind.*

Satz (Becher, Heiber & Slaman 2014)

Es gibt berechenbare absolut Borel normale Liouvillesche Zahlen.

Satz (Martin 2001)

Es gibt eine berechenbare Liouvillesche Zahl, die nicht *normal zu jeder Basis ist.*

- Die Kombinationen $\mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{Z}}$ und $\mathcal{L} \cap \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{Z}}$ sind sämtlich nicht leer.

Ergebnisse für nicht berechenbare Zahlen I

Eigenschaft

Zufällige Zahlen sind Borel normal aber weder berechenbar noch Liouvillesch.

Beispiel (Dilution (Fortsetzung))

Es sei $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_i \cdots \in A_b^\omega$ *Martin-Löf zufällig und* $\mathbf{y} := x_1 00 x_2 00 \cdots x_i 00 \cdots$. *Dann gilt* $0 < \underline{\kappa}(\mathbf{y}) = \frac{1}{3} < 1$.
Daher ist $0.\mathbf{y}$ *weder berechenbar noch eine Liouvillesche Zahl.*
Offensichtlich ist $0.\mathbf{y}$ *auch nicht normal.*

- Die Kombinationen $\bar{\mathcal{L}} \cap \bar{\mathcal{C}} \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{Z}$ und $\bar{\mathcal{L}} \cap \bar{\mathcal{C}} \cap \bar{\mathcal{N}} \cap \bar{\mathcal{Z}}$ sind nicht leer.

Ergebnisse für nicht berechenbare Zahlen II

Beispiel (Nicht-zufällige ω-Wörter mit $\underline{\kappa}(\mathbf{x}) = 1$ (Fortsetzung))

Es seien $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_i \cdots \in A_b^\omega$ Martin-Löf zufällig und

$$\mathbf{y}(i) := \begin{cases} 0 & \text{if } i \in \{2^n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ und} \\ \mathbf{x}(i) & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

$\alpha = 0.\mathbf{y}$ ist nicht Martin-Löf zufällig, wegen $\underline{\kappa}(\mathbf{y}) = 1$ aber absolut Borel normal, und, wie im vorhergehenden Beispiel, ist α weder berechenbar noch eine Liouvillesche Zahl.

- Die Kombination $\bar{\mathcal{L}} \cap \bar{\mathcal{C}} \cap \mathcal{N} \cap \bar{\mathcal{Z}}$ ist nicht leer.

Ergebnisse für berechenbare Zahlen

Beispiel (Knight 1991)

Jede rationale Zahl ist berechenbar, aber weder Liouvillesch noch normal.

Die berechenbare irrationale Zahl $\alpha_b = \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2^i}$ *ist weder Liouvillesch noch normal zur Basis b.*

Es ist ein *offenes Problem*, ob es berechenbare absolut Borel normale, nicht Liouvillesche Zahlen gibt.

Satz (Coons 2013)

Die Stoneham Zahl $F(1/2) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-k^i} \cdot k^{-i}$ *(wobei* $k \in \mathbb{N}$ *ungerade ,* $k \geq 3$ *) ist berechenbar, normal zur Basis* 2 *(aber nicht zur Basis* 6*), und hat das Irrationalitätsmaß* $\mu(F(1/2)) = k < \infty$.

- Die Kombination $\overline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{Z}}$ ist nicht leer, und

  die Kombination $\overline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{Z}}$ könnte nicht leer sein.

Vortragsmanuskript

Das Vortragsmanuskript ist erhältlich als:

Cristian S. Calude and Ludwig Staiger,
Liouville numbers, Borel normality and Martin-Löf-randomness

Research Report 448 (2013) des Centre for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science unter

https://www.cs.auckland.ac.nz/research/groups/CDMTCS/researchreports/index.php?date&open=18

bzw. auf der Seite

http://www.informatik.uni-halle.de/arbeitsgruppen/theorie/publikationen/cdmtcs/

Vielen Dank