# (Multi-)Graphen, (Adjazenz-)Matrizen und Eigenwerte

Ludwig Staiger

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Institut für Informatik

Februar 2017

# Graphen und Matrizen

| **(Multi-)Graph** | **(Adjazenz-)Matrix** |
|---|---|
| Knoten: $V = \{1, \ldots, n\}$ | $A_G = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ |
| Kanten | $a_{ij} =$ Anzahl der Kanten von $i$ nach $j$ |
| | $A_G^\ell = (a_{ij}^{(\ell)})_{1 \le i,j \le n}$ |
| | $a_{ij}^{(\ell)} =$ Anzahl der Pfade der Länge $\ell$ von $i$ nach $j$ |
| $G_A = (\{1, \ldots, n\}, E)$ | $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ |
| $E = \{(i,j) : a_{ij} \neq 0\}$ | |

## Zusammenhang und (Un-)Zerlegbarkeit

| **Graph** | **Matrix** |
|---|---|
| $G_A = (\{1,\ldots,n\}, E)$<br>$E = \{(i,j) : a_{ij} \neq 0\}$ | $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ |
| $G_A$ stark zusammenhängend | $A$ unzerlegbar (irreduzibel) |
| | $A$ **nicht-negativ** |
| der größte gemeinsame Teiler aller Längen von Kreisen in $G_A$ ist 1 | $\Leftrightarrow (I+A)^n$ ist positiv<br>$A$ primitiv<br>$\Leftrightarrow \exists \ell(\ell \leq n^2 - 2n + 2 \wedge A^\ell$ ist positiv) |

**(azyklischer) Graph der Zusammenhangskomponenten $\overline{G}_A$ und (obere) Blockdiagonalform $\overline{A}$**

| **Graph** | **Matrix** |
| --- | --- |
| $\overline{G}_A$ ergibt<br>neue Reihenfolge der Knoten<br>(Zeilen und Spalten) | Umordnung der Matrix $A \to \overline{A}$<br>$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{1,2} & \dots & A_{1,\kappa} \\ O & A_2 & \dots & A_{2,\kappa} \\ O & O & \ddots & \vdots \\ O & O & O & A_\kappa \end{pmatrix}$<br>$A_\iota$ unzerlegbar oder $A_\iota = (0)$, $1 \le \iota \le \kappa$ |

# Matrizen und Eigenwerte

**Definition (Eigenvektor $\vec{x}$ zum Eigenwert $\lambda$)**

$$\vec{x} \neq \vec{o} \quad \wedge \quad A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

**Definition (Charakteristisches Polynom $\chi_A(t)$)**

$$\chi_A(t) := \det \left| t \cdot I - A \right| \quad (I \text{ - Einheitsmatrix})$$

**Theorem**

*$\lambda$ ist genau dann Eigenwert von $A$, wenn $\chi_A(\lambda) = 0$.*

**Theorem (Cayley & Hamilton)**

*Es gilt $\chi_A(A) = O$.* ($O$ - Nullmatrix)

# Eigenwerte und rekurrente Beziehungen

**Theorem (nochmals Cayley & Hamilton)**

*Es seien $A$ eine $n \times n$-Matrix, $A^\ell = (a_{ij}^{(\ell)})_{1 \le i,j \le n}$ und $\chi_A(t) = t^n - \sum_{k=0}^{n-1} q_k \cdot t^k$. Dann gilt*

$$a_{ij}^{(\ell+n)} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k \cdot a_{ij}^{(\ell+k)}.$$

**Theorem (Einfache Nullstellen)**

*$\chi_A(t)$ habe nur einfache Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_k \neq 0$. Dann gilt*

$$a_{ij}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{n} c_{ij,k} \cdot \lambda_k^\ell$$

*für geeignete Konstanten $c_{ij,k}$.*

# Eigenwerte und rekurrente Beziehungen

**Theorem (Mehrfache Nullstellen)**

*$\chi_A(t)$ habe die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_k \neq 0$, mit den Vielfachheiten $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ und $\lambda_{m+1} = 0$ mit der Vielfachheit $\kappa_{m+1}$. Dann gilt*

$$a_{ij}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k}(\ell) \cdot \lambda_k^{\ell}$$

*für geeignete Polynome $p_{ij,k}$ vom Grade $\kappa_k - 1$ und für $\ell \geq \kappa_{m+1}$.*

**Bemerkung**

$$\kappa_1 \cdot \lambda_1 + \cdots + \kappa_m \cdot \lambda_m + \kappa_{m+1} \cdot \lambda_{m+1} = n$$

# Nicht-negative Matrizen

**Die Theorie von *Oskar Perron* und *Ferdinand Georg Frobenius***

**Theorem**

- *Jede nicht-negative $n \times n$-Matrix $A$ hat einen Eigenwert $\lambda_{\text{max}} \geq 0$ maximalen Betrags, zu dem ein nicht-negativer Eigenvektor $\vec{x}_{\text{max}}$ gehört.*
- $\lambda_{\text{max}} = \lim_{\ell \to \infty} \sqrt[\ell]{||A^\ell||} = \inf\{\sqrt[\ell]{||A^\ell||} : \ell \in \mathbb{N}\}$
- *Ist darüber hinaus $A$ unzerlegbar, so sind $\lambda_{\text{max}}$ einfacher Eigenwert, $\vec{x}_{\text{max}} > \vec{o}$, und alle anderen Eigenwerte maximalen Betrags sind ebenfalls einfach und haben die Form $\lambda_{\text{max}} \cdot e^{2\pi \mathbf{i} \cdot k/m}$, $1 \leq k < m$, für geeignetes $m \leq n$. ($\mathbf{i} = \sqrt{-1}$)*

**Bemerkung**

$\lim_{\ell \to \infty} \sqrt[\ell]{||A^\ell||} = \inf\{\sqrt[\ell]{||A^\ell||} : \ell \in \mathbb{N}\}$ ist der *Spektralradius* von $A$.

# Anzahl der Pfade in Graphen

**Lemma**

*Es seien $G$ ein Graph, $A_G$ seine Adjazenzmatrix und $\lambda_{\max}$ der maximale Eigenwert mit der Vielfachheit $\kappa$. Dann gibt es für beliebige Knoten $i, j$ höchstens $\mathrm{O}(\ell^{\kappa-1} \cdot \lambda_{\max}^{\ell})$ Pfade der Länge $\ell$ vom Knoten $i$ zum Knoten $j$.*

**Lemma**

*Ist ein Graph $G$ stark zusammenhängend und $\lambda_{\max}$ der maximale Eigenwert von $A_G$, so gibt es für beliebige Knoten $i, j$ stets $\Theta(\lambda_{\max}^{\ell})$ Pfade der Länge $\ell$ vom Knoten $i$ zum Knoten $j$.*

# Nicht-negative Matrizen

**Die Theorie von *Oskar Perron* und *Ferdinand Georg Frobenius***

**Theorem**

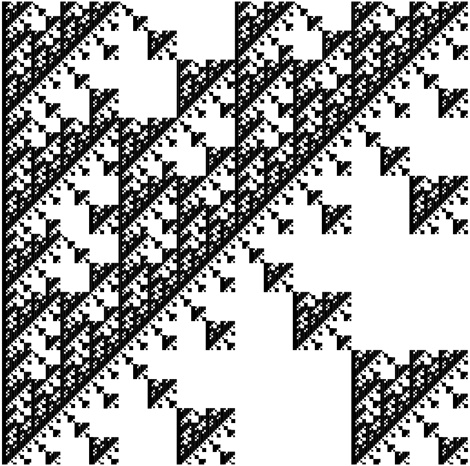
*Es seien A eine nicht-negative $n \times n$-Matrix $\sigma^{(\max)}$ und $\sigma^{(\min)}$ ihre maximale bzw. minmale Zeilen- (Spalten-)summe. Dann gelten*

- $\sigma^{(\min)} \leq \lambda_{\max} \leq \sigma^{(\max)}$ *und,*
- *ist A unzerlegbar und* $\sigma^{(\min)} < \sigma^{(\max)}$, *so ist* $\sigma^{(\min)} < \lambda_{\max} < \sigma^{(\max)}$

**Theorem**

- *Ist A eine nicht-negative $n \times n$-Matrix und $O \leq B \leq A$, dann ist* $\lambda_{\max}^{(B)} \leq \lambda_{\max}^{(A)}$.
- *Ist darüber hinaus A unzerlegbar und $B \neq A$, so gilt* $\lambda_{\max}^{(B)} < \lambda_{\max}^{(A)}$.

# Illustration: Fraktale

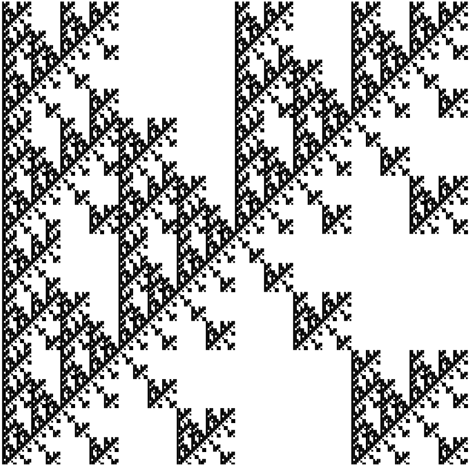


$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t(t^2 - 4t + 2)$$
$$\lambda_{\max} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{lcllll}
S_1 & = & (0,1)\cdot S_3 & \cup\,(0,0)\cdot S_1 & \cup\,(1,1)\cdot S_1 & \cup\,(1,0)\cdot S_2 \\
S_2 & = & (0,1)\cdot S_2 & \cup\,(0,0)\cdot S_1 & \cup\,(1,1)\cdot S_3 & \cup\,(1,0)\cdot S_1 \\
S_3 & = & (0,1)\cdot S_1 & & & \cup\,(1,0)\cdot S_3
\end{array}$$

## Illustration: Fraktale

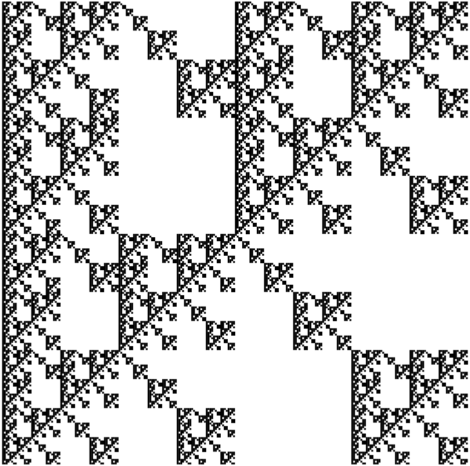


$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi(t) =$
$(t-1)(t^2-3t-1)$
$\lambda_{\max} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\begin{aligned}
S_1 &= (0,1)\cdot S_3 \cup (0,0)\cdot S_1 \cup (1,1)\cdot S_1 \cup (1,0)\cdot S_2 \\
S_2 &= (0,1)\cdot S_2 \cup (0,0)\cdot S_1 \cup (1,0)\cdot S_1 \\
S_3 &= (0,1)\cdot S_1 \cup (1,0)\cdot S_3
\end{aligned}$$

# Illustration: Fraktale



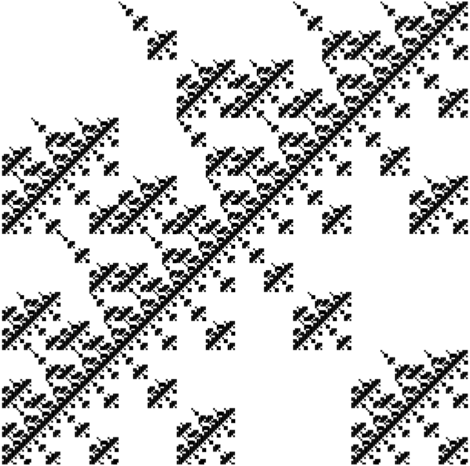
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^3 - 3t^2 - t + 1$$

$$\lambda_{\max} < \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= (0,1)\cdot S_3 \cup (0,0)\cdot S_1 \cup (1,1)\cdot S_1 \cup (1,0)\cdot S_2 \\ S_2 &= (0,0)\cdot S_1 \cup (1,1)\cdot S_3 \cup (1,0)\cdot S_1 \\ S_3 &= (0,1)\cdot S_1 \cup (1,0)\cdot S_3 \end{aligned}$$

# Illustration: Fraktale



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^3 - 4t^2 + 3t - 1$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= (0,1)\cdot S_3 \cup (0,0)\cdot S_1 \cup (1,1)\cdot S_1 \cup (1,0)\cdot S_2 \\
S_2 &= (0,1)\cdot S_2 \cup (0,0)\cdot S_1 \cup (1,1)\cdot S_3 \\
S_3 &= (0,1)\cdot S_1 \cup (1,0)\cdot S_3
\end{aligned}$$

# Fraktale: maximale Eigenwerte = maximale Nullstellen

$t(t^2 - 4t + 2)$ $\quad$ $(t-1)(t^2 - 3t - 1)$

$t^3 - 3t^2 - t + 1$ $\quad$ $t^3 - 4t^2 + 3t - 1$

# Literatur


- Peter Lancaster & Miron Tismenetsky: *The theory of matrices*
  Academic Press, 1996
- Eugene Seneta: *Non-negative matrices and Markov chains*
  Springer, 1981
- Feliks R. Gantmacher: *Matrizentheorie*
  Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986
- Alexej I. Markuschewitsch, *Rekursive Folgen*
  Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955


Für ungerichtete Graphen


- Andries E. Brouwer & Willem H. Haemers: *Spectra of graphs*
  Springer, 2012
  http://members.upc.nl/w.haemers/home.html