Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik
EIK 12 (1976) 6, 307–311

Reguläre Nullmengen

Von LUDWIG STAIGER[1])

Herrn Prof. Dr. H. Thiele zum 50. Geburtstag gewidmet

Bei der Präzisierung des Begriffes der unendlichen binären Zufallsfolge spielen die von SCHNORR [4] eingeführten Begriffe des total rekursiven Sequentialtests und der total rekursiven Nullmenge eine wesentliche Rolle. Ein besonders einfacher Sequentialtest ist die Akzeptierung durch endliche Automaten. In den Arbeiten [2] und [3] wurde nachgewiesen, daß die Klasse der durch endliche Automaten akzeptierbaren Folgenmengen mit der Klasse der regulären (im Sinn von McNAUGHTON [2]) Folgenmengen übereinstimmt. Außerdem sind die regulären Folgenmengen bezüglich der natürlichen Topologie des Folgenraumes ebenfalls sehr einfache Mengen (vgl. [7], [9]), nämlich zufolge TRACHTENBROT [9] in den untersten Klassen der BORELschen Hierarchie enthalten. Die vorliegende Arbeit wird sich deshalb bei der Untersuchung der regulären Folgenmengen vom Maße Null weitgehend auf die topologischen Eigenschaften dieser Mengen beziehen. Weiterhin werden wir noch die regulären Nullmengen mit den von SCHNORR und STIMM [5] untersuchten Zufallsfolgen, die durch endliche Automaten nach dem Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem erzeugt werden, vergleichen.

Für ein endliches Alphabet X mit mindestens zwei Buchstaben bezeichne X^* die Menge aller (endlichen) Wörter über X sowie X^ω die Menge aller (abzählbar unendlichen) Folgen über X. $e \in X^*$ sei das leere Wort. Weiterhin erklären wir $W^\omega =_{\mathrm{Df}} W \cdot W \cdot W \cdot \ldots$ für $W \subseteq X^* \setminus \{e\}$ als die Menge aller abzählbar unendlichen Produkte von Wörtern aus W. Zu $p \in X^*$ und $b \in X^* \cup X^\omega$ bezeichne $p \cdot b$ die Aneinanderreihung von p und b. Daraus ergibt sich in natürlicher Weise ein Produkt $W \cdot B$ von Mengen $W \subseteq X^*$ und $B \subseteq X^* \cup X^\omega$. Für $\{p\} \cdot B$ werden wir kurz $p \cdot B$ schreiben.

Wir nennen gemäß [2] eine Folgenmenge F *regulär*, wenn es eine natürliche Zahl n und reguläre Wortmengen W_i und V_i gibt, derart, daß $e \notin V_i$ und $F = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot V_i^\omega$.

In [2] und [3] wurde nachgewiesen, daß die Klasse der regulären Folgenmengen mit der Klasse der in endlichen Automaten akzeptierbaren Folgenmengen übereinstimmt. Weiterhin ergibt sich aus [2], daß die Menge aller regulären Teilmengen von X^ω bezüglich der Operationen $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ abgeschlossen ist.

Betrachten wir nun die Produkttopologie in X^ω, so ist unmittelbar klar (s. auch [9]), daß X^ω in der angegebenen Topologie homöomorph dem CANTORschen Diskontinuum ist.

Bezeichnen wir mit $\mathsf{C}(F)$ und $\mathsf{I}(F)$ die *abgeschlossene Hülle* bzw. den *offenen Kern* der Menge $F \subseteq X^\omega$, so folgt aus [6], daß für reguläres F auch $\mathsf{C}(F)$ und somit auch $\mathsf{I}(F)$ regulär sind. Wir bemerken noch, daß eine Menge $F \subseteq X^\omega$ genau dann *offen* ist, wenn es ein $W \subseteq X^*$ gibt, so daß $F = W \cdot X^\omega$ gilt.

---

[1]) Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena (Direktor: Prof. Dr. G. SCHLOSSER).

Schließlich sei $F \mid p =_{\mathrm{Df}} \{\xi : p \cdot \xi \in F\}$ für $p \in X^*$ und $F \subseteq X^\omega$. Aus [8] ist bekannt, daß für reguläres F sämtliche $F \mid p$ wieder regulär sind und überdies die Menge $\{F \mid p : p \in X^*\}$ endlich ist.

Im folgenden sei stets μ ein Maß auf X mit $\mu(X) = 1$ und $\mu(x) > 0$ für alle $x \in X$, d. h., μ ist nicht *singulär*. Mit $\overline{\mu}$ bezeichnen wir das Produktmaß auf X^ω zu μ, und mit $\mu^* : X^* \mapsto (0, 1]$ die wie folgt definierte Abbildung:

$$\mu^*(p) =_{\mathrm{Df}} \overline{\mu}(p \cdot X^\omega) .$$

Lemma 1. *$F \subseteq X^\omega$ ist genau dann nirgends dicht (in X^ω), wenn die Bedingung*

$$\forall p\big(p \in X^* \to \exists w(w \in X^* \wedge F \mid p \cdot w = \emptyset)\big)$$

erfüllt ist.

Beweis. Es sei F nirgends dicht, d. h. $\mathsf{IC}(F) = \emptyset$. Damit ist auch $\mathsf{C}(F)$ nirgends dicht. Dann ist für jedes $p \in X^*$ die Menge $p \cdot X^\omega \setminus \mathsf{C}(F)$ offen und nichtleer. Somit gibt es ein $w \in X^*$ derart, daß $pw \cdot X^\omega \subseteq p \cdot X^\omega \setminus \mathsf{C}(F)$. Also gilt $F \mid p \cdot w = \emptyset$.

Ist andererseits die Bedingung erfüllt, so kann für keine Menge der Form $p \cdot X^\omega$ die Beziehung $p \cdot X^\omega \subseteq \mathsf{C}(F)$ gelten. Denn es ist $F \subseteq X^\omega \setminus pw \cdot X^\omega$ und somit auch $\mathsf{C}(F) \subseteq X^\omega \setminus p \cdot w \cdot X^\omega$. Also haben wir $\mathsf{IC}(F) = \emptyset$, d. h., F ist nirgends dicht. ∎

Die Aussage von Lemma 1 läßt sich für reguläre Folgenmengen noch verschärfen.

Lemma 2. *Es sei $F \subseteq X^\omega$ regulär. F ist genau dann nirgends dicht, wenn die Bedingung*

$$\exists w\big(w \in X^* \wedge \forall p(p \in X^* \to F \mid p \cdot w = \emptyset)\big)$$

erfüllt ist.

Beweis. Offenbar ist die Bedingung hinreichend. Ist nun F nirgends dicht, so ist nach Lemma 1 auch $F \mid p$ für $p \in X^*$ nirgends dicht. Da weiterhin F regulär und mithin $\{F \mid p : p \in X^*\}$ endlich ist, gibt es eine endliche Menge von Wörtern $\{p_1, \dots, p_n\}$ derart, daß $\bigcup_{p \in X^*} F \mid p = \bigcup_{i=1}^{n} F \mid p_i$. Damit ist $\bigcup_{p \in X^*} F \mid p$ nirgends dicht, und wir haben nach Lemma 1 ein $w \in X^*$ mit $\Big(\bigcup_{p \in X^*} F \mid p\Big) \mid w = \emptyset$. Hieraus folgt wegen $\Big(\bigcup_{p \in X^*} F \mid p\Big) \mid w = \bigcup_{p \in X^*} F \mid p \cdot w$ die angegebene Bedingung. ∎

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun den Eigenschaften des Produktmaßes $\overline{\mu}$ für reguläre Teilmengen von X^ω zu.

Lemma 3. *Ist $F \subseteq X^\omega$ regulär und nirgends dicht, so gilt $\overline{\mu}(F) = 0$.*

Beweis. Da $\{F \mid p : p \in X^*\}$ endlich ist, gibt es ein $q \in X^*$ derart, daß für alle $p \in X^*$ die Beziehung $\overline{\mu}(F \mid q) \geqq \overline{\mu}(F \mid p)$ gilt. Nach Lemma 1 gibt es dann ein $w \in X^*$ mit $F \mid q \cdot w = \emptyset$. Da $\overline{\mu}$ Produktmaß ist, haben wir

$$\overline{\mu}(F \mid q) = \sum_{|v| = |w|} \mu^*(v) \cdot \overline{\mu}(F \mid q \cdot v) .^{1)}$$

Somit gilt $\overline{\mu}(F \mid q) \leqq \big(1 - \mu^*(w)\big) \cdot \overline{\mu}(F \mid q)$, d. h. $\overline{\mu}(F \mid q) = 0$. Also folgt $\overline{\mu}(F) = 0$. ∎

Für reguläre Mengen der topologischen Typen F_σ und G_δ lassen sich die folgenden Beziehungen angeben.[2])

---

[1]) $|v|$ bezeichne die Länge des Wortes v.

[2]) Eine Menge hat den topologischen Typ F_σ (G_δ) wenn sie sich als abzählbare Vereinigung abgeschlossener (abzählbarer Durchschnitt offener) Mengen darstellen läßt. Insbesondere sind in X^ω die abgeschlossenen und die offenen Mengen sowohl vom Typ F_σ als auch vom Typ G_δ.

Satz 4. *Es sei F reguläre F_σ-Menge. Dann gilt* $\bar{\mu}(F) = \bar{\mu}(\mathsf{I}(F))$.

Beweis. Nach [7] läßt sich jede reguläre F_σ-Menge F in der Form $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ darstellen, wobei die F_i regulär und abgeschlossen sind. Dann ist $F \setminus \mathsf{I}(F) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \setminus \mathsf{I}(F))$. Die Mengen $F_i \setminus \mathsf{I}(F)$ sind als Teilmengen von $F_i \setminus \mathsf{I}(F_i)$ nirgends dicht und, da F_i und $\mathsf{I}(F)$ regulär sind, auch regulär.

Damit leiten sich aus Lemma 3 unmittelbar $\bar{\mu}(F \setminus \mathsf{I}(F)) = 0$ und wegen $\mathsf{I}(F) \subseteq F$ auch $\bar{\mu}(F) = \bar{\mu}(\mathsf{I}(F))$ ab. ▌

Mit Satz 4 folgt sofort

Korollar 5. *Es sei E reguläre G_δ-Menge. Dann gilt* $\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(\mathsf{C}(E))$.

Korollar 6. *Für eine reguläre G_δ-Menge E gilt genau dann $\bar{\mu}(E) = 0$, wenn E nirgends dicht ist.*

Beweis. Die eine Richtung folgt aus Lemma 3. Zum Beweis der anderen bemerken wir zunächst, daß aus Korollar 5 und Satz 4 die Gleichung $\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(\mathsf{C}(E)) = \bar{\mu}(\mathsf{IC}(E))$ folgt. Ist nun $\bar{\mu}(E) = 0$, so erhalten wir sofort $\mathsf{IC}(E) = \emptyset$. ▌

Eine zu Korollar 6 gleichlautende Aussage läßt sich schon nicht für reguläre F_σ-Mengen beweisen, da z.B. die Menge $X^* \cdot \{x\}^\omega$ mit $x \in X$ zwar vom Maße Null aber dicht in X^ω ist. Trotzdem lassen sich die regulären Mengen vom Maße Null topologisch charakterisieren.

Satz 7. *Eine reguläre Menge ist genau dann vom Maße Null, wenn sie eine Menge erster Kategorie ist.*[1])

Eine zu Satz 7 gleichlautende Charakterisierung beliebiger Nullmengen ist nicht möglich, da kein nichtsinguläres Produktmaß $\bar{\mu}$ sämtliche Mengen erster Kategorie als Nullmengen hat (vgl. [10], Kap. 22).

Beweis zu Satz 7. In den Arbeiten [6, 7] wurde gezeigt, daß sich jede reguläre Menge in der Form $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \cap E_i$, wobei die F_i reguläre F_σ-Mengen und die E_i reguläre G_δ-Mengen sind, darstellen läßt. Es reicht also aus, die Behauptung im Falle $n = 1$ zu beweisen.

Es seien also F reguläre F_σ-Menge und E reguläre G_δ-Menge. Dann gilt $F \cap E \subseteq (\mathsf{I}(F) \cap E) \cup (F \setminus \mathsf{I}(F))$.

Ist nun $\bar{\mu}(F \cap E) = 0$, so gilt auch $\bar{\mu}(\mathsf{I}(F) \cap E) = 0$, und da $\mathsf{I}(F) \cap E$ regulär und vom Typ G_δ ist, folgt mit Korollar 6, daß $\mathsf{I}(F) \cap E$ nirgends dicht ist. Weiterhin ist nach dem Beweis von Satz 4 die Menge $F \setminus \mathsf{I}(F)$ abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen. Also ist $F \cap E$ als Teilmenge einer Menge erster Kategorie selbst Menge erster Kategorie (s. [1]).

Es sei nun $F \cap E$ Menge erster Kategorie. Dann ist $\mathsf{I}(F) \cap E$ eine G_δ-Menge erster Kategorie und somit nach [1] nirgends dicht. Damit gilt $\bar{\mu}(\mathsf{I}(F) \cap E) = 0$. Weiterhin ist nach Satz 4 $\bar{\mu}(F \setminus \mathsf{I}(F)) = 0$, und also $\bar{\mu}(F \cap E) = 0$. ▌

Es erweist sich mithin, daß die Eigenschaft, reguläre Nullmenge zu sein, maßinvariant bzgl. nichtsingulärer Produktmaße ist.

Bezeichnen wir mit $\mathbf{R}_0^X$ die Vereinigung aller regulären Teilmengen von X^ω vom Maße Null, so haben wir

[1]) Eine Menge ist im Sinne von Baire genau dann von *erster Kategorie*, wenn sie abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist.

Korollar 8. $\mathbf{R}_0^X = \bigcup_{w \in X^*} (X^\omega \setminus X^* \cdot w \cdot X^\omega)$.

Beweis. Es ist $X^* \cdot w \cdot X^\omega$ eine reguläre offene Menge, die dicht in ganz X^ω liegt. Mit Korollar 6 folgt dann $\overline{\mu}(X^* \cdot w \cdot X^\omega) = 1$. Also haben wir $X^\omega \setminus X^* \cdot w \cdot X^\omega \subseteq \mathbf{R}_0^X$.

Ist nun andererseits $\xi \in \mathbf{R}_0^X$, so folgt aus dem Beweis von Satz 7 die Existenz einer regulären nirgends dichten Menge F, in der ξ liegt. Nach Lemma 2 gibt es dann ein $w \in X^*$, welches nicht Teilwort der Folge ξ ist.[1]) Damit haben wir

$$\xi \in X^\omega \setminus X^* \cdot w \cdot X^\omega . \blacksquare$$

Wir vergleichen abschließend die Menge $\mathbf{R}_0^X$ mit der Menge $\mathbf{B}_\mu^X$ der Bernoullifolgen über X zur Verteilung μ[2]), die nach [5] mit der Menge der durch endliche Automaten nach dem Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem darstellbaren Zufallsfolgen übereinstimmt.

Es sei M die Menge aller Maße μ auf X mit der Eigenschaft $\mu(X) = 1$ und $\mu(x) > 0$ für alle $x \in X$.

Satz 9. 1. *Für jedes* $\mu \in \mathsf{M}$ *gilt* $\mathbf{R}_0^X \cap \mathbf{B}_\mu^X = \emptyset$.

2. *Es gibt eine rekursive Folge* ξ *aus* X^ω, *die nicht in* $\mathbf{R}_0^X \cup \bigcup_{\mu \in \mathsf{M}} \mathbf{B}_\mu^X$ *liegt.*

Beweis. 1. Nach Definition ist jedes $w \in X^*$ Teilwort einer Bernoullifolge ξ. Zufolge Korollar 8 kann deshalb ξ nicht in $\mathbf{R}_0^X$ liegen.

2. Es seien g eine rekursive Aufzählung von ganz X^* sowie $x \in X$. Wir setzen $\xi_x =_{\mathrm{Df}} \prod_{i=1}^{\infty} \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{(i \cdot |g(i)|)!\text{-mal}} \cdot g(i)$. Offensichtlich gilt $\xi_x \notin \mathbf{R}_0^X$. Weiterhin ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Auftretens von x als Teilwort von ξ_x gleich $1 \neq \mu(x)$. $\blacksquare$

Mit $\{\xi_x\}$ haben wir gleichzeitig ein Beispiel einer Nullmenge erster Kategorie, die in keiner regulären Nullmenge enthalten ist.

Literatur

[1] Kuratowski, K., Topology I. Academic Press, New York-London; PWN Warszawa; 1966.

[2] McNaughton, R., Testing and Generating Infinite Sequences by a Finite Automaton. Inform. and Control 9 (1966) 5, 521–530.

[3] Rabin, M. O., Decidability of Second-order Theories and Automata of Infinite Trees. Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1967), 1–35.

[4] Schnorr, C. P., Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[5] Schnorr, C. P., H. Stimm, Endliche Automaten und Zufallsfolgen. Acta Informatica 1 (1972), 345–359.

[6] Штайгер Л., Аналог теоремы Гинзбурга-Роуза для последовательностных операторов и регулярных множеств последовательностей. Сб.тр. ВЦ АН СССР, Москва (erscheint demnächst).

[7] Staiger, L., K. Wagner, Automatentheoretische und automatenfreie Charakterisierungen topologischer Klassen regulärer Folgenmengen. EIK 10 (1974) 7, 379–392.

[8] Трахтенброт Б. А., Конечные автоматы и логика одноместных предикатов. Сибирский матем журнал 3 (1961) 1, 103–131.

---

[1]) Wir nennen w *Teilwort* von ξ, wenn es ein $p \in X^*$ und ein $\xi' \in X^\omega$ gibt, für die $p \cdot w \cdot \xi' = \xi$ gilt.

[2]) Gemäß [4] heißt $\xi \in X^\omega$ *Bernoullifolge* zur Verteilung μ, wenn der Grenzwert der relativen Häufigkeit, mit der ein Wort w als Teilwort von ξ auftritt, für jedes $w \in X^*$ existiert und gleich $\mu^*(w)$ ist.

[9] Трахтенброт Б. А., Я. М. Барздинь, Конечные автоматы. Изд. Наука, Москва 1970.
[10] Охтову, J. C., Measure and Category. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Klasse der regulären Folgenmengen vom Maße Null (bei beliebigem nichtsingulären Produktmaß) mit der Klasse der regulären Folgenmengen erster Kategorie übereinstimmt. Weiterhin werden Beziehungen zwischen dieser Klasse und der Klasse der Folgenmengen, die durch von endlichen Automaten ausgeführte Zufallstests charakterisiert werden, angegeben.

Abstract

The present paper shows that the class of regular null-sets of sequences (concerning an arbitrary non-singular product-measure) and the class of regular sets of sequences of the first category coincide. Furthermore are given connections between this class and the class of sets of sequences which do not withstand random tests carried out by finite automata.

Резюме

Настоящая работа показывает, что класс регулярных множеств последовательностей меры нуль (при любой невырожденной мере произведения) совпадает с классом регулярных множеств последовательностей первой категории. Кроме того даются соотношения между этим классом и классом тех множеств последовательностей, которые характеризуемы случайными тестами произведенные конечными автоматами.

(Eingegangen am 5. 11. 1975)

Anschrift des Verfassers:

L. Staiger
69 Jena
Carl-Blomeyer-Str. 53
DDR